



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Migração por Mínimos Quadrados usando condição
de imagem de verdadeira amplitude : uma
abordagem no domínio da imagem**

NATIÊ ALMEIDA ALBANO

Belém
2018

NATIÊ ALMEIDA ALBANO

**Migração por Mínimos Quadrados usando condição
de imagem de verdadeira amplitude : uma
abordagem no domínio da imagem**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade
Federal do Pará para obtenção do título de Mestre em
Geofísica.

Área de Concentração: Modelagem e inversão de dados
geofísicos

Linha de pesquisa: Imageamento de dados geofísicos

Orientador: Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

Belém
2018

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

A326m Albano, Natiê Almeida.
Migração por Mínimos Quadrados Usando Condição de Imagem de Verdadeira Amplitude : Uma abordagem no Domínio da Imagem / Natiê Almeida Albano. — 2018.
64 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação Geofísica, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

1. Imageamento Sísmico. 2. Migração por Mínimos Quadrados. 3. Amplitude Verdadeira. I. Título.

CDD 622.1592

NATIÊ ALMEIDA ALBANO

**Migração por Mínimos Quadrados usando condição de imagem
de verdadeira amplitude : uma abordagem no domínio da
imagem**

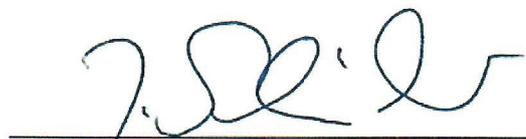
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Geofísica da Universidade Federal do Pará para ob-
tenção do título de Mestre em Geofísica.

Data de aprovação: 14 de Novembro de 2018

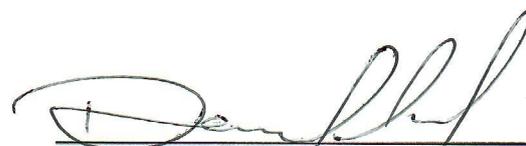
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa (Orientador)
Universidade Federal do Pará



Prof. Dr. Jörg Schleicher
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Daniel Leal Macedo
Universidade Federal do Pará

Para Antônio Albano,
meu querido e amado pai
(in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, prof. Jessé Costa, pela paciência, por todo o conhecimento transmitido e pela confiança em mim depositada para desenvolver este trabalho acadêmico, cujo tema me agradou enormemente.

Aos professores Jörg Schleicher e Daniel Macedo pela participação na banca examinadora. Suas críticas construtivas serão muito bem vindas e certamente contribuirão positivamente para versão final desta dissertação.

Aos colegas do laboratório PROSIS, Bruno, Isadora, Adryane e Murilo pelos momentos de discussões acadêmicas ou simplesmente de descontração.

A Francisco Neto, por sua disponibilidade em ceder dados para aplicação da metodologia.

Ao CPGF por oferecer a estrutura necessária para desenvolvimento desta pesquisa.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

"Um cientista em seu laboratório não é um mero técnico. Ele também é uma criança que enfrenta fenômenos naturais que o impressionam como se fossem contos de fadas."

(Marie Curie)

RESUMO

A migração por quadrados mínimos é um método de inversão sísmica linear que objetiva produzir imagens migradas com maior resolução e com amplitude dos eventos migrados proporcional ao contraste de propriedades físicas na subsuperfície. Sua aplicação é indicada para minimizar distorções na imagem sísmica que resultam da abertura limitada do arranjo de aquisição e das variações na iluminação da subsuperfície pelo campo de onda incidente. Zonas de baixa iluminação, também chamadas de zonas de sombra, são mais comuns quando o modelo de velocidade apresenta fortes variações laterais de velocidade. Nesses cenários a migração por quadrados mínimos pode melhorar significativamente a qualidade da imagem sísmica. Originalmente, a migração por quadrados mínimos foi formulada como um problema inverso linear no domínio dos dados. No qual a aproximação de Born modela o campo de onda espalhado associados a reflexões primárias. Esta abordagem, apesar de muito robusta tem um custo computacional elevado em termos de número de modelagem e migrações necessárias para sua convergência. Alternativamente, para reduzir seu custo computacional a migração por quadrados mínimos foi reformulada no domínio da imagem. Nesta formulação podemos utilizar melhores condições de imagem para a migração reversa no tempo para melhorar a qualidade da imagem resultante. Esta dissertação investiga os efeitos de condições de imagem com amplitude verdadeira, para migração reversa no tempo, na migração por quadrados mínimos no domínio da imagem, também denominada de migração por deconvolução. Esta abordagem é motivada por estas condições de imagem produzirem imagens com maior resolução, amplitudes proporcionais ao coeficientes de reflexão no limite de altas frequências e, forte atenuação do ruído de retroespalhamento. Nossa implementação foi avaliada nos dados sintéticos do modelo Marmousi. As imagens resultante apresentam maior resolução e amplitudes melhor correlacionadas com a refletividade do modelo que as imagens correspondentes resultantes da implementação convencional migração por quadrados mínimos no domínio da imagem.

Palavras-chaves: Imageamento Sísmico. Migração por Mínimos Quadrados. Amplitude Verdadeira.

ABSTRACT

The least squares migration (LSM) is a linear inversion of seismic data which aims to provide migrated images with higher resolution and amplitudes proportional to the velocity contrast across the reflectors interface. The LSM minimize imaging artifacts produced by the limited acquisition aperture and variations in the subsurface illumination by the seismic wavefield. The implementation of reverse time migration by least squares, in data domain, considers the classical imaging condition, which is based on the cross-correlation between incident and reflected wavefields. These illumination problems are more prevalent when strong lateral velocity variations are present. Originally, the LSM was formulated as an inverse linear problem in the data domain. The Born approximation is the linear model used to approximate the recorded wavefield of primary reflections. Although very robust and effective in improving the quality of seismic images, this approach has a high computational cost due the multiple modeling and migration iterations necessary for convergence. Alternatively, the LSM was later reformulated in imaging domain. This approach allows us to take advantage true amplitude imaging conditions of RTM to improve the results of LSM in the image domain. This dissertation investigates the use of true amplitude imaging for reverse time migration (RTM) in order to improve LSM in the image domain, also known as migration deconvolution. The true amplitude imaging condition already improves the RTM results in terms of resolution, improved amplitudes and backscattering noise attenuation. We validate our implementation the LSM with true amplitude imaging condition in the Marmousi data set. When compared with the conventional implementation of LSM in image domain, our deconvolved images present higher resolution and amplitudes better correlated with the model reflectivity.

Keywords: Seismic Imaging. Least Squares Migration. True Amplitude.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação dos campos de onda em subsuperfície necessários para a RTM em um meio com velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$. Cada ponto $I(\mathbf{x})$ na imagem migrada é resultado da correlação cruzada entre o campo de onda incidente $p_s(t, \mathbf{x}_s)$ e o campo de onda retropropagado $p_r(t, \mathbf{x}_r)$	4
2.2	Modelo de velocidade Sigsbee suavizado	8
2.3	Migração RTM do dado Sigsbee utilizando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (equação 2.5). O retângulo azul chama a atenção para o imageamento de pontos difratores, o retângulo preto para o ruído de alta frequência, o retângulo branco para o ruído de retro-espalhamento e o retângulo vermelho indica a zona de sombra.	9
2.4	Migração RTM do dado Sigsbee utilizando a condição de imagem de amplitude verdadeira (equação 2.9).O retângulo azul chama a atenção para o imageamento de pontos difratores, o retângulo preto para o ruído de alta frequência, o retângulo branco para o ruído de retro-espalhamento e o retângulo vermelho indica a zona de sombra.	9
2.5	Acurácia no imageamento de difratores. Difratores verdadeiros do modelo sigsbee (a). Imageamento através da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (b) e imageamento através da condição de imagem de amplitude verdadeira (c).	10
2.6	Efeito do ruído de retro-espalhamento na imagem migrada. Migração através da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (a) e migração através da condição de imagem de amplitude verdadeira (b).O ponto preto indica o ruído de retro- espalhamento para a região.	11
2.7	Ruído de alta frequência na imagem migrada RTM. Migração usando Condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (a) e de amplitude verdadeira (b). O ponto preto chama a atenção para a diferença de ruído de alta frequência produzido por cada condição de imagem e o ponto branco, para a diferença de ruído devido às reverberações associadas ao corpo de sal.	12
2.8	Imageamento da seção sedimentar à esquerda do modelo Sigsbee. Migração usando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (a) e migração com amplitude verdadeira (b).	13
3.1	Representação do espalhamento do campo de onda de acordo com a ordem de espalhamento. Modificada de Snieder (2004).	18

3.2	Configuração do problema de espalhamento do campo de onda. O meio é decomposto em um meio de referência (c_0) e em um meio espalhador (δc). O primeiro gera um campo de onda sem perturbação (p_0) e o segundo, um campo espalhado (δp).	19
3.3	Representação da resposta impulsiva de um sistema óptico focalizado. O ponto imagem é resultado da convolução entre o objeto pontual e a PSF.	22
3.4	Esquema para estimativa das PSFs no imageamento sísmico. Ao serem aplicados os processos de modelagem seguida de migração em um ponto difrator com valor de velocidade $c(\mathbf{x})$, o resultado é a PSF referente a este ponto.	22
3.5	PSFs geradas para um grid regular de pontos no modelo de velocidade do Marmousi. (a) Modelo de velocidade suavizado do Marmousi, (b) pontos espalhadores com valores de perturbação referentes aos mesmos pontos no modelo suavizado e (c) resultado da PSF para cada ponto.	23
3.6	Esquematização para estimativa do raio de dispersão da PSF. O ponto em que os eixos de cruzam representa o centro da PSF. Cada ponto na malha (i, j) possui um valor de amplitude $R_{i,j}$ da PSF e uma distância \mathbf{r} a partir da origem	25
3.7	Janelamento Nuttall para um plano de PSFs. PSFs sem janelamento em (a) e PSFs janeladas em (b).	26
3.8	Esquema para interpolação bilinear das PSFs. Dado um ponto onde se deseja obter uma PSF interpolada $R(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, deve-se localizar as quatro PSFs em torno deste ponto para serem utilizadas no cálculo da interpolação.	27
4.1	Modelo de velocidade suavizado do Marmousi.	30
4.2	Point Spread functions produzidas a partir da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano.	31
4.3	Point Spread functions produzidas a partir da condição de imagem de amplitude verdadeira.	32
4.4	Migração RTM do dado Marmousi utilizando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano.	33
4.5	Migração RTM do dado Marmousi utilizando a condição de imagem com amplitude verdadeira.	33
4.6	Modelo de refletividade verdadeiro do Marmousi.	34
4.7	Esquema da implementação de LSM no domínio da imagem: conhecidas a imagem migrada e matriz Hessiana (PSFs), o sistema linear é resolvido e o modelo é estimado. Utilização da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano. (lado esquerdo) e utilização da condição de imagem com amplitude verdadeira (lado direito).	35

4.8	Imagem deconvolvida usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano.	35
4.9	Imagem deconvolvida usando condição de imagem de amplitude verdadeira.	36
4.10	Efeito da aplicação de LSM utilizando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (ampliação da região localizada no extremo esquerdo superior das imagens migrada e deconvolvidas. Imagem migrada (a) e imagem deconvolvida (b). As setas indicam a diferença de resolução entre as imagens.	36
4.11	Efeito da aplicação da LSM usando a condição de imagem de verdadeira amplitude (ampliação da região localizada no extremo esquerdo superior das imagens migradas e deconvolvidas). Imagem migrada (a) e imagem deconvolvida (b). As setas indicam a diferença de resolução entre as imagens.	37
4.12	Detalhe da região indicada pelo retângulo branco nas Figuras (4.8) e (4.9) e a respectiva região no modelo de refletividade verdadeiro. (a) Refletividade verdadeira , (b) imagem deconvolvida usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e (c) imagem deconvolvida usando condição de imagem de amplitude verdadeira.	38
4.13	Detalhe da região indicada pelo retângulo vermelho nas Figuras (4.8) e (4.9) e a respectiva região no modelo de refletividade verdadeiro . (a) Refletividade verdadeira, (b) imagem deconvolvida usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e (c) imagem deconvolvida usando condição de imagem de amplitude verdadeira.	39
4.14	Imagem deconvolvida sem janelamento das PSFs (a) e com janelamento da PSFs (b) (condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano).	40
4.15	Imagem deconvolvida sem janelamento das PSFs (a) e com janelamento da PSFs (b) (condição de imagem de amplitude verdadeira).	40
4.16	Efeito do espaçamento entre as PSFs na deconvolução. Deconvolução com espaçamento de 500 metros entre as PSFs (a) e deconvolução com espaçamento de 250 metros entre as PSFs (b) (condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano).	42
4.17	Efeito do espaçamento entre as PSFs na deconvolução. Deconvolução com espaçamento de 500 metros entre as PSFs (a) e deconvolução com espaçamento de 250 metros entre as PSFs (b) (condição de imagem com amplitude verdadeira)	42
4.18	Efeito da resolução na imagem deconvolvida de acordo com do parâmetro de amortecimento λ	44

4.19	Detalhe da região dominada por dobras na Figura 4.18 para evidenciar o aumento de resolução de acordo com a diminuição do parâmetro λ . Para $\lambda = 0.05$ a imagens deconvolvida perde focalização devido a instabilidade da solução do sistema linear (região apontada pela seta).	45
------	---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO COM AMPLITUDE VERDADEIRA	3
2.1	ASPECTOS GERAIS DA RTM	3
2.2	METODOLOGIA	5
2.2.1	Condições de imagem para migração usando equações de onda	5
2.2.2	Condição de imagem de amplitude verdadeira na RTM	6
2.2.3	Comparação entre a imagem migrada usando as condições de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e de amplitude Verdadeira	8
3	MIGRAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS NO DOMÍNIO DA IMAGEM	15
3.1	ASPECTOS GERAIS	15
3.2	A APROXIMAÇÃO BORN	17
3.3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE MÍNIMOS QUADRADOS NA INVERSÃO SÍSMICA LINEAR	19
3.3.1	Aproximação da matriz Hessiana via Point Spread Function	21
3.4	DECONVOLUÇÃO DA IMAGEM MIGRADA	24
3.4.1	Janelamento das Point Spread Functions	24
3.4.2	Interpolação das Point Spread Functions	27
3.4.3	Atulização do modelo	28
4	APLICAÇÃO, RESULTADOS E DISCUSSÃO	30
4.1	DECONVOLUÇÃO DAS IMAGENS MIGRADAS	30
4.2	COMPARAÇÃO ENTRE A LSM USANDO AS CONDIÇÕES DE IMAGEM COM COMPENSAÇÃO DE AMPLITUDE/FILTRO LAPLACIANO E DE AMPLITUDE VERDADEIRA.	38
4.3	FATORES QUE INTERFEREM NA LSM	40
4.3.1	Janelamento das Point Spread Functions	40
4.3.2	Espaçamento entre as Point Spread Functions	42
4.3.3	Fator de amortecimento λ	44
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	46
	REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

A Migração Reversa no Tempo (RTM) é a metodologia mais utilizada atualmente para produzir imagens sísmicas da subsuperfície em regiões com forte variação lateral de velocidade (McMechan, 1983; Whitmore, 1983). Esta é a única abordagem que permite focalizar refletores com mergulho arbitrário, eventos associados a ondas prismáticas e *diving waves* (Leveille et al., 2011). Apesar destas vantagens, a RTM apresenta limitações associadas à abertura limitada dos arranjos de aquisição, a amplitude dos eventos nas imagens é afetada devido a iluminação não uniforme da subsuperfície em regiões com forte variação lateral de velocidade e, a presença de ruídos associados a retro-espalhamento em modelos de velocidade com forte contraste de impedância (Zhang e Sun, 2009; Costa et al., 2009). Para atenuar estas limitações, a Migração por Mínimos Quadrados (LSM) propõe formular o imageamento sísmico como um problema inverso no qual os eventos associados ao espalhamento do campo de onda incidente são modelados pela aproximação de Born.

A migração RTM por quadrados mínimos, implementada no domínio dos dados, requer a solução iterativa de um sistema linear, em geral usando o algoritmo de gradientes conjugados (Valenciano, 2008; Fletcher et al., 2016). Em cada iteração o campo de onda espalhado é modelado pela aproximação de Born e o resíduo entre o campo modelo e o campo espalhado observado deve ser migrado, conseqüentemente, o custo computacional de cada iteração é aproximadamente duas vezes o custo de uma migração RTM. Como alternativa para reduzir o custo computacional da migração RTM no domínio dos dados, a migração RTM no domínio da imagem permite um aumento de resolução da migração RTM com um menor custo computacional. Nesta abordagem uma aproximação numérica do Hessiano da função objetivo da migração por quadrados mínimos é utilizada para reduzir o custo das iterações do algoritmo de gradientes conjugados (Aoki e Schuster, 2009; Fletcher et al., 2016; Schuster, 2017).

Neste trabalho investigamos o efeito de condições de imagem que aproximam um inverso assintótico da modelagem Born (Kiyashchenko et al., 2007; Op't Root et al., 2012) na aproximação para o Hessiano na RTM por quadrados mínimos no domínio da imagem. Implementamos a condição deduzida por Op't Root et al. (2012), os quais demonstraram, usando análise microlocal, que esta condição de imagem é um inverso assintótico da modelagem Born. Estes autores estenderam o trabalho de Kiyashchenko et al. (2007) que propuseram, baseados na teoria do raio, uma condição de imagem que estima o coeficiente de reflexão para incidência normal. Esta condição de imagem coincide, no limite de alta frequência, com a condição de imagem com compensação de amplitude proposta por Bleistein et al. (2001). Os experimentos numéricos apresentados por Kiyashchenko et al. (2007) para o modelo de sal da SEG apresentam maior resolução e atenuação do ruído de retroespalhamento que as imagens correspondentes obtidas com a condição de imagem

com compensação de amplitude/filtro Lapaciano com compensação de amplitude e filtro laplaciano (Biondi, 2006).

No domínio do dado, algumas formulações para melhorar o resultado da LSM já foram propostas. Por exemplo, Zhang et al. (2015) formulou a LSM sem dependência do pulso fonte que produz o dado sísmico. O resultado é uma imagem invertida livre de artefatos devido erros na estimativa da wavelet. Yang e Zhang (2018) propuseram ponderar a expressão do gradiente do problema de migração por mínimos quadrados por um fator que depende do ângulo de abertura entre o campo de onda incidente e o refletido para atenuar o efeito da degradação da amplitude do gradiente com a profundidade.

Nosso objetivo neste trabalho é investigar as possíveis vantagens de condições de imagens baseadas em inversos assintóticos para RTM por quadrados mínimos no domínio da imagem. Apesar do melhor desempenho destas novas condições de imagem para aumentar a resolução e reduzir ruídos de retroespalhamento, efeitos da abertura limitada dos arranjos de aquisição e variação na iluminação ainda se fazem presentes. Consequentemente, combinando estas novas condições de imagem com o imageamento por quadrados mínimos no domínio da imagem pode ser uma alternativa para mitigar estes efeitos.

Esta dissertação encontra-se estruturada como segue. No capítulo 2 fazemos uma abordagem a cerca da Migração Reversa no Tempo, discutimos a utilização das condições de imagem com compensação de amplitude/filtro Lapaciano e de amplitude verdadeira e apresentamos experimentos numéricos comparando estas duas abordagens. No capítulo 3, apresentamos a formulação geral para a Migração por Mínimos Quadrados, com desenvolvimento focado para abordagem no domínio da imagem. O capítulo 4 apresenta os detalhes de nossa implementação da migração por quadrados mínimos com condições de imagem de amplitude verdadeira. Apresentamos experimentos numéricos ilustrando os efeitos na imagem migrada de diferentes parametrizações para migração por quadrados mínimos. Finalmente, o capítulo 5 apresenta a discussão de nossos resultados, conclusões e indicações de trabalhos futuros.

2 MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO COM AMPLITUDE VERDADEIRA

Neste capítulo, apresentamos os aspectos mais relevantes da Migração Reversa no Tempo para o desenvolvimento da LSM. Particularmente, o efeito das condições de imagem para aproximação dos coeficientes de reflexão em subsuperfície. Discutimos duas condições de imagem: a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e a condição de imagem de amplitude verdadeira . Esta última condição implementa um assintótico para modelagem Born e produz imagens com maior resolução a amplitudes proporcionais ao coeficiente de reflexão normal. Apresentamos exemplos numéricos da migração RTM dos dados Sigsbee com as duas condições de imagem citadas para destacar os efeitos da condição de imagem de amplitude verdadeira na melhora da qualidade da imagem RTM.

2.1 ASPECTOS GERAIS DA RTM

Imagens migradas representam as camadas refletoras em subsuperfície e são uma importante ferramenta para determinação de possíveis reservatórios de hidrocarbonetos. Métodos de migração sísmica podem ser separados em dois grupos principais: 1- os baseados em traçamento de raio e 2- os baseados na solução numérica da equação da onda (Leveille et al., 2011). O primeiro inclui a Migração Kirchhoff em Profundidade e a Migração de Feixes Gaussianos. O segundo grupo inclui as migrações baseadas na equação da onda unidirecional e completa. A migração da equação da onda completa corresponde à RTM.

A diferença entre os quatro métodos acima é como os campos de onda são construídos. O propagador da Migração Kirchhoff é baseada na aproximação assintótica de alta frequência. Esta abordagem apresenta dificuldades em lidar com eventos múltiplos associados ao campo de onda. A Migração de Feixes Gaussianos trata o campo de onda como uma superposição de feixes gaussianos, reduzindo a probabilidade de desenvolver eventos caústicos do campo de onda (Hill, 1990). Uma limitação comum dos métodos de migração baseados na teoria do raio é que estes possuem dificuldades em lidar com modelos que apresentam fortes variações de velocidade (Ba et al., 2014).

Os métodos de migração baseados na equação da onda não apresentam dificuldades em lidar com caústicas do campo de onda. Mas quando desenvolvidos adotando o campo de onda apenas unidirecionalmente, apresentam dificuldades em imagear refletores com alto ângulo de mergulho (Mulder e Plessix, 2004). RTM, devido utilizar o campo de onda completo como propagador, não apresenta limitações de ângulos do refletor e fortes variações laterais velocidade (Leveille et al., 2011).

A RTM foi simultaneamente formulada por mais de um autor (McMechan, 1983; Whitmore, 1983; Baysal et al., 1983), recebendo a denominação proposta pelo último. A idéia chave consiste em, dados: um modelo de velocidade que aproxima a velocidade de propagação verdadeira em subsuperfície, o campo de onda refletido observado no arranjo de receptores, para uma determinada fonte, é propagado de forma reversa no tempo (retropropagado) e o campo de onda incidente da fonte extrapolado de forma direta no tempo (propagado).

A imagem é formada quando os campos de onda incidente e refletido coincidem no tempo e no espaço (Claerbout, 1985). Para isto, uma condição de imagem que relaciona os campos deve ser aplicada. Podemos resumir a construção de uma imagem migrada RTM em profundidade em três etapas.

1. Extrapolação do campo de onda a partir da fonte ($p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$).
2. Extrapolação reversa no tempo do campo de onda a partir dos receptores, na qual a fonte é o dado observado ($p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r)$).
3. Aplicação da condição de imagem ($I(\mathbf{x})$).

A Figura (2.1) esquematiza as etapas listadas acima.

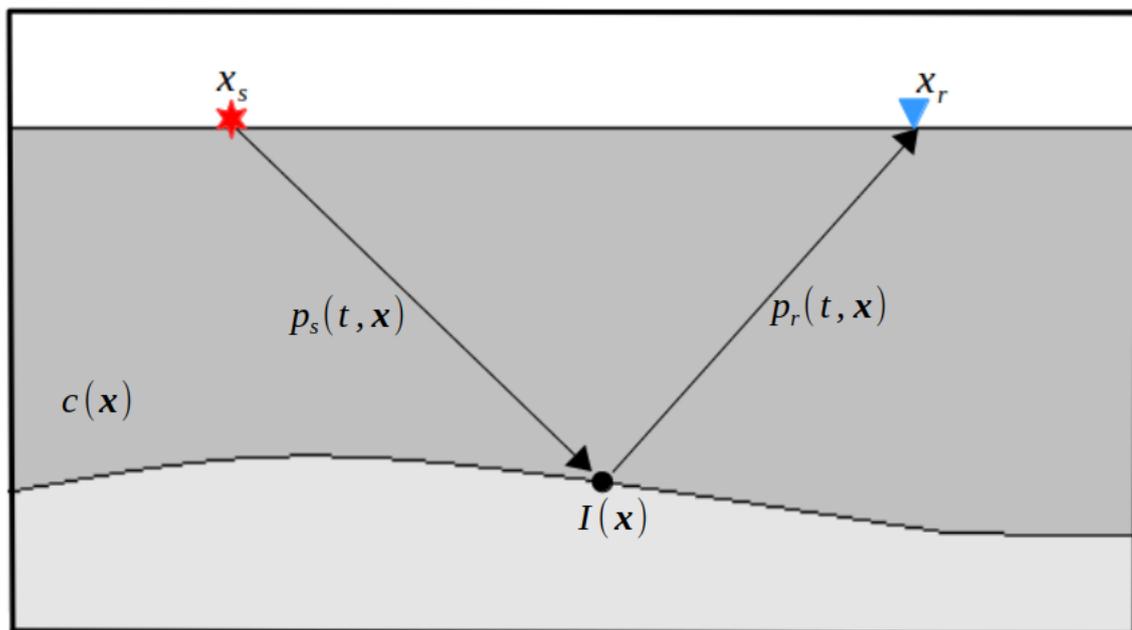


Figura 2.1: Representação dos campos de onda em subsuperfície necessários para a RTM em um meio com velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$. Cada ponto $I(\mathbf{x})$ na imagem migrada é resultado da correlação cruzada entre o campo de onda incidente $p_s(t, \mathbf{x}_s)$ e o campo de onda retropropagado $p_r(t, \mathbf{x}_r)$.

2.2 METODOLOGIA

A extrapolação do campo de onda da fonte é realizada através da solução da equação da onda que, para uma fonte pontual em um meio isotrópico e com densidade constante é expressa por

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)}{\partial t^2} = \nabla^2 p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) + S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s). \quad (2.1)$$

em que o campo de onda incidente é expresso por $p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$ e o termo fonte $S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ representa o pulso sísmico da fonte na posição \mathbf{x}_s . A equação da onda pode ser especificada para o campo retropropagado dos receptores $p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$ como

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)}{\partial t^2} = \nabla^2 p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) + \sum_{\mathbf{r}} D(t, \mathbf{x}_r)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \quad (2.2)$$

em que $\sum_{\mathbf{r}} D(t, \mathbf{x}_r)$ representa o termo fonte e é equivalente ao campo de onda gravado no arranjo de receptores, cada um localizado na posição \mathbf{x}_r .

A imagem migrada é obtida a partir de uma expressão que relaciona estes dois campos, denominada de condição de imagem. A literatura apresenta condições de imagem baseadas em diferentes princípios, por exemplo, na correlação cruzada entre os campos de onda (Claerbout, 1971), no tempo de excitação (Chang e McMechan, 1986) e na razão entre as amplitudes do campo de onda do receptor e da fonte (Chattopadhyay e McMechan, 2008). A correlação cruzada entre os campos é uma das metodologias mais utilizadas, quando aplicada com compensação de amplitude, produz estimativas mais coerentes do coeficiente de reflexão em subsuperfície (Kaelin e Guitton, 2006).

2.2.1 Condições de imagem para migração usando equações de onda

A condição de imagem clássica para a migração usando equações de onda foi proposta por Claerbout (1971), esta baseia-se na correlação cruzada de lag zero entre os campos de onda incidente e refletido que, para uma única fonte é expressa por

$$I_c(\mathbf{x}) = \int_T p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) dt. \quad (2.3)$$

Para pequenos contrastes de impedância, a condição de imagem (2.3) é uma boa aproximação para obtenção de informações sobre os refletores em subsuperfície (Kaelin e Guitton, 2006). Mas, se o modelo de velocidade para a migração contém fortes contrastes de vagariedade, dois fatores prejudicam a qualidade da imagem migrada: 1- valores de correlação cruzada elevados ocorrem ao longo de toda a trajetória do evento de reflexão produzindo artefato de baixa frequência (ruído de retro-espalhamento) na imagem migrada e 2- o campo de onda perde amplitude rapidamente com a profundidade, gerando pouca informação sobre os refletores mais profundo.

A aplicação de filtro Laplaciano na imagem migrada atenua os ruídos de baixa frequência e a perda de amplitude do campo de onda com a profundidade pode ser compensado dividindo a correlação cruzada pela iluminação da fonte (Biondi, 2006).

$$I_c(\mathbf{x}) = \frac{1}{P(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)} \nabla^2 \left[\int_t p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r) dt \right], \quad (2.4)$$

em que $P(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$ corresponde à iluminação da fonte

$$P(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) = \int_t p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) dt. \quad (2.5)$$

A condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (2.4) produz uma boa estimativa dos coeficientes de reflexão em subsuperfície, mas não é exata. Além disso, a imagem migrada resultante da soma de todos os tiros possui amplitude prejudicada devido a dependência do ângulo de reflexão de cada imagem de tiro comum (Kiyashchenko et al. (2007)).

Outras formulações para fornecer aproximações mais acuradas do coeficiente de reflexão já foram abordados na literatura, por exemplo, Costa et al. (2009) adicionaram uma correção de obliquidade na condição de imagem (2.4) para compensar os efeitos de mergulho na amplitude do refletor.

Na próxima seção, discutimos uma condição de imagem formulada especificamente para a RTM que, no regime de alta frequência apresenta amplitude verdadeira para os coeficientes de reflexão devido configurar um inverso assintótico da modelagem Born.

2.2.2 Condição de imagem de amplitude verdadeira na RTM

Nas equações a seguir, estamos utilizando a seguinte convenção para transformada de Fourier

$$p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\omega, \mathbf{x}) d\omega. \quad (2.6)$$

Inicialmente, Kiyashchenko et al. (2007) propôs uma condição de imagem para aproximação do coeficiente de reflexão de afastamentos nulos que, em regime de alta frequência, corresponde à aproximação para perturbações dos parâmetros dos meio através da inversão baseada na teoria raio proposta por Bleistein et al. (2001).

Op't Root et al. (2012), em uma análise mais detalhada baseada em operadores integrais de Fourier, formulou a seguinte condição de imagem que representa o inverso assintótico da modelagem Born,

$$I_v(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(-i\omega) |\tilde{p}(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)|^2} \left[\tilde{p}_s(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \tilde{p}_r(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r) - \frac{c^2}{\omega^2} \nabla \tilde{p}_s(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \nabla \tilde{p}_r(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r) \right] d\omega. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) pode imediatamente ser reescrita com

$$I_v(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(-i\omega)(-i\omega)^2 |\tilde{p}(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)|^2} \left[(-i\omega)\tilde{p}_s(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)(-i\omega)\tilde{p}_r(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r) + c^2 \nabla \tilde{p}_s(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \nabla \tilde{p}_r(\omega, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r) \right] d\omega. \quad (2.8)$$

Para implementar esta condição de imagem no domínio do tempo, utilizamos as propriedades da transformada de Fourier, na qual multiplicar por $-i\omega$ no domínio da frequência equivale à derivação temporal e dividir por $-i\omega$ equivale à integração no tempo. Adicionalmente, para reduzir possíveis efeitos de instabilidade devidos à divisão por valores muito pequenos de amplitude, em nossa implementação utilizamos a iluminação resultante de todos os tiros $P'(\mathbf{x})$ para efetuar a compensação de amplitude. Sob essas condições, a equação (2.8) pode ser expressa no domínio do tempo como

$$I_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{P'(\mathbf{x})} \sum_s \int_t dt \left[\frac{\partial p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)}{\partial t} \frac{\partial q_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r)}{\partial t} + c^2 \nabla p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r) \right], \quad (2.9)$$

em que $P'(\mathbf{x})$ denota a auto-correlação da segunda derivada temporal do campo da fonte,

$$P'(\mathbf{x}) = \sum_s \int_t dt \left(\frac{\partial p_s(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)}{\partial t} \right)^2, \quad (2.10)$$

e a integral é aplicada no campo de onda do receptor.

$$q_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) = \int_0^T p_r(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_r) dt. \quad (2.11)$$

Neste trabalho, a equação (2.9) é denominada de condição de imagem de amplitude verdadeira e a propomos para o desenvolvimento da LSM no domínio da imagem.

2.2.3 Comparação entre a imagem migrada usando as condições de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e de amplitude Verdadeira

O efeito da aplicação da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e da condição de imagem com amplitude verdadeira na imagem migrada é apresentado nesta seção. O objetivo é mostrar a qualidade de cada imagem migrada de acordo com a condição de imagem utilizada na RTM. Para esta finalidade, utilizamos para migração o dado sintético Sigsbee, cujo modelo de velocidade suavizado é mostrado na Figura 2.2.

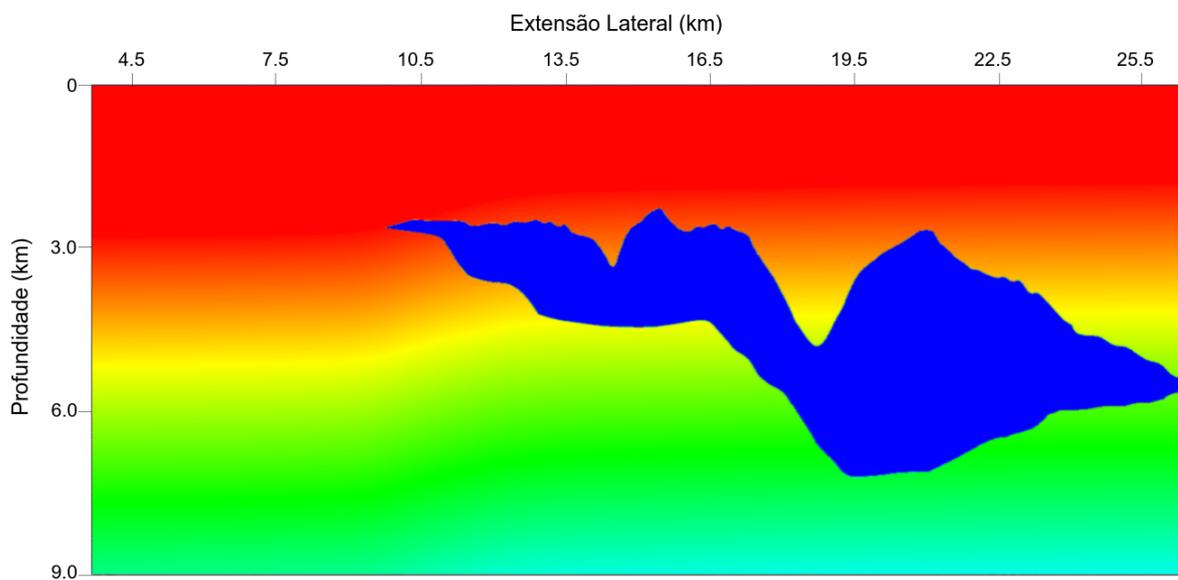


Figura 2.2: Modelo de velocidade Sigsbee suavizado

As imagens migradas, aplicando a RTM usando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano de amplitude verdadeira, são mostradas nas Figuras 2.3 e 2.4, respectivamente.

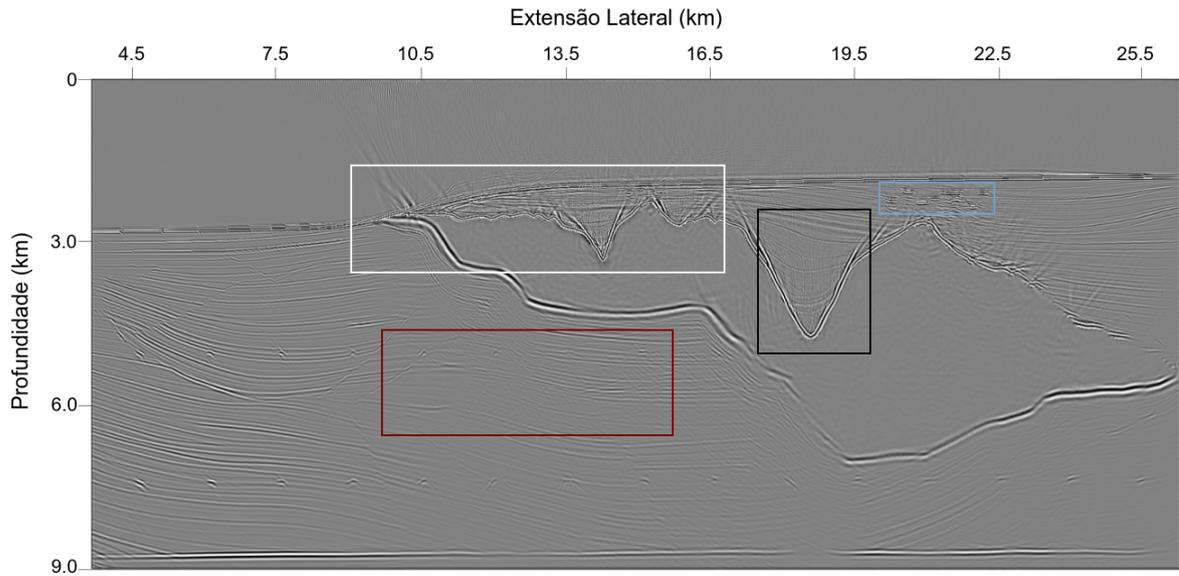


Figura 2.3: Migração RTM do dado Sigsbee utilizando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (equação 2.5). O retângulo azul chama a atenção para o imageamento de pontos difratores, o retângulo preto para o ruído de alta frequência, o retângulo branco para o ruído de retro-espalhamento e o retângulo vermelho indica a zona de sombra.

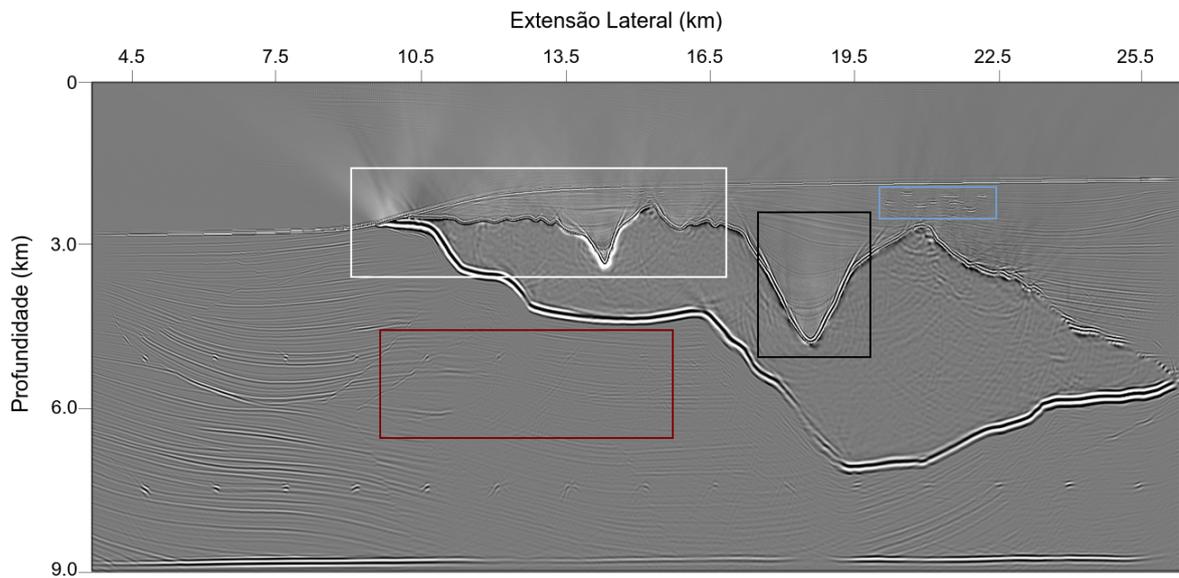


Figura 2.4: Migração RTM do dado Sigsbee utilizando a condição de imagem de amplitude verdadeira (equação 2.9). O retângulo azul chama a atenção para o imageamento de pontos difratores, o retângulo preto para o ruído de alta frequência, o retângulo branco para o ruído de retro-espalhamento e o retângulo vermelho indica a zona de sombra.

A comparação entre as imagens migradas das Figuras 2.3 e 2.4 nos permite destacar os seguintes pontos:

- Resolução e distribuição de amplitude

A imagem migrada obtida da condição de imagem de amplitude verdadeira apresenta maior resolução e distribuição de amplitude mais coerente de acordo com a propriedade física do meio. O contraste de velocidade associado às camadas sedimentares deve produzir amplitudes significativamente menores para as interfaces dos refletores que as decorrentes da interface entre a camada sedimentar e o sal, que possui maior contraste de impedância. Na Figura 2.4 este efeito é melhor observado, bem como a delimitação mais precisa do domo de sal.

- Acurácia no imageamento de difratores

A condição de imagem de amplitude verdadeira apresenta resultados mais acurados para o imageamento de difratores em subsuperfície. Isto é mostrado através da Figura 2.5 que mostra a ampliação da região indicada pelo retângulo branco nas Figuras 2.3 e 2.4

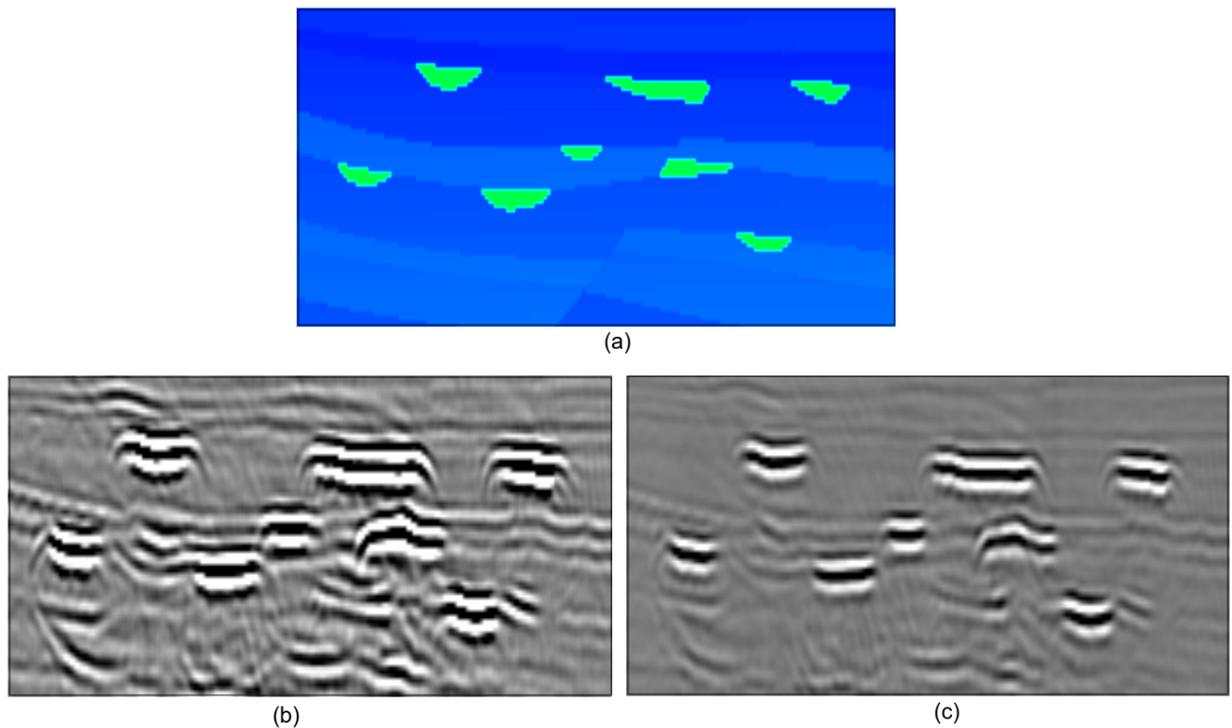


Figura 2.5: Acurácia no imageamento de difratores. Difratores verdadeiros do modelo sigsbee (a). Imageamento através da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (b) e imageamento através da condição de imagem de amplitude verdadeira (c).

- Ruído de retro-espalhamento

As duas imagens deconvolvidas apresentam ruído de retro-espalhamento. No entanto, na imagem migrada com condição de imagem de amplitude verdadeira (Figura 2.4) esse ruído de baixa frequência apresenta-se menos atenuado em relação a imagem migrada com condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (Figura 2.3). Revelando que a condição de imagem de amplitude verdadeira não supera a aplicação do filtro Laplaciano na condição de imagem com compensação de amplitude para remoção de ruído de baixa frequência. A Figura 2.6 mostra a região ampliada indicada pelo retângulo branco das Figuras 2.3 e 2.4 para mostrar o efeito do ruído de retro-espalhamento de acordo com a condição de imagem utilizada na migração.

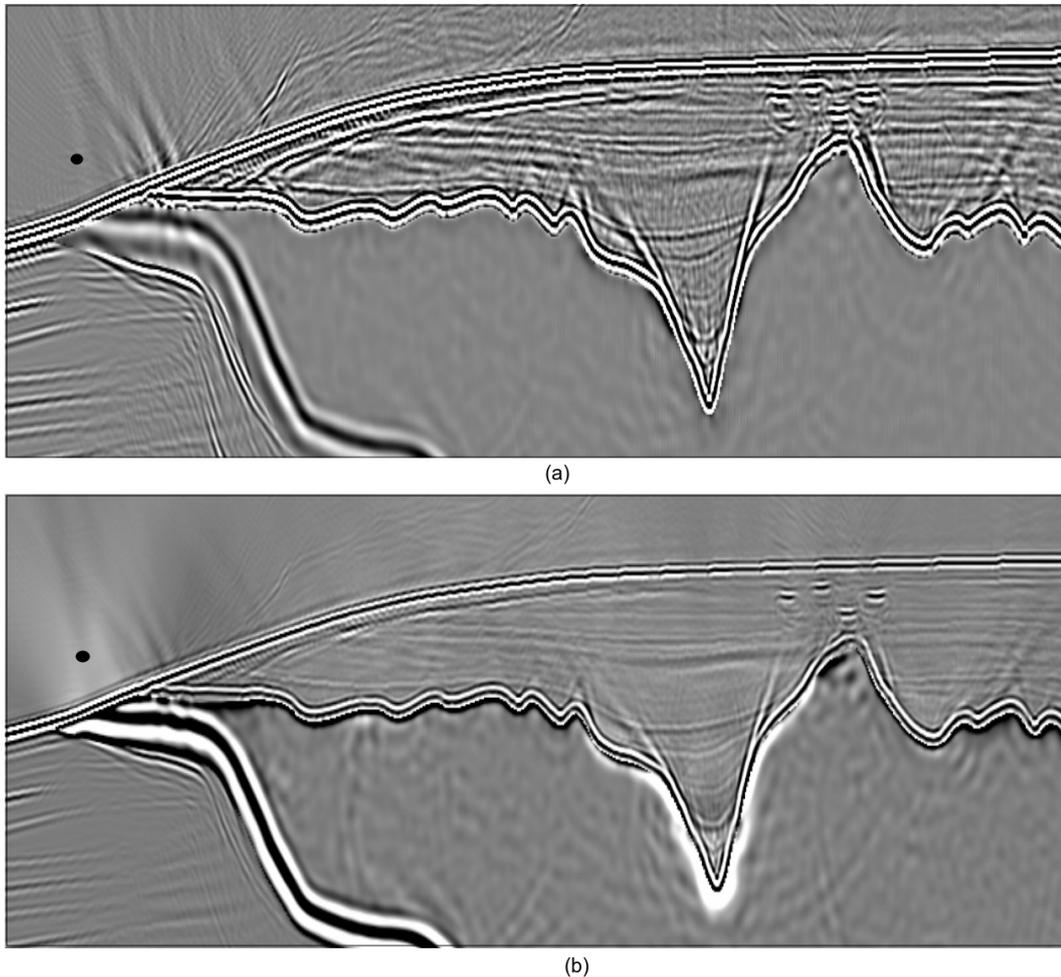


Figura 2.6: Efeito do ruído de retro-espalhamento na imagem migrada. Migração através da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (a) e migração através da condição de imagem de amplitude verdadeira (b). O ponto preto indica o ruído de retro- espalhamento para a região.

- Ruídos de alta frequência e devido às reverberações no corpo salino.

A condição de imagem de amplitude verdadeira produz imagens migradas com menor efeito de ruído de alta frequência. Por outro lado, possui maior influência de ruídos associados às reverberações do campo de onda no corpo salino. Compare a ampliação das regiões indicadas pelo retângulo preto nas imagens migradas (Figuras 2.3 e 2.4) mostradas na Figura 2.7.

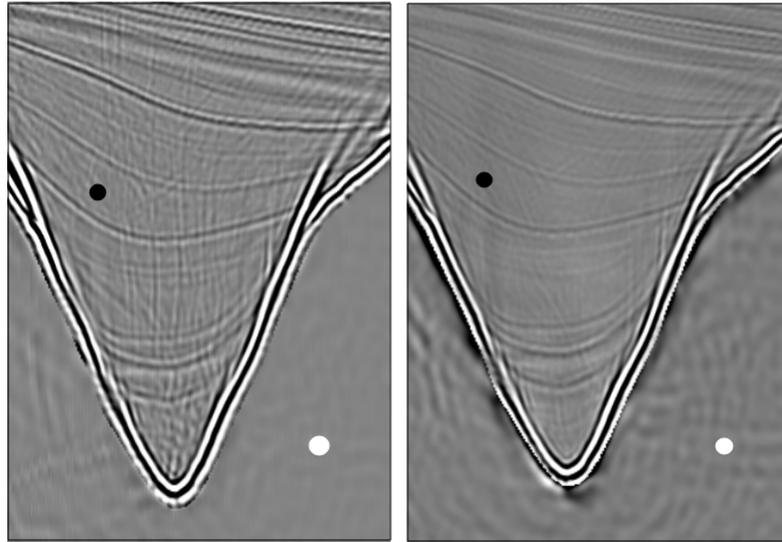


Figura 2.7: Ruído de alta frequência na imagem migrada RTM. Migração usando Condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (a) e de amplitude verdadeira (b). O ponto preto chama a atenção para a diferença de ruído de alta frequência produzido por cada condição de imagem e o ponto branco, para a diferença de ruído devido às reverberações associadas ao corpo de sal.

Em termos de importância, o ruído de alta frequência presente na imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano causa maior prejuízo à imagem migrada que o ruído devido às reverberações do corpo do sal, uma vez que prejudica a amplitude dos refletores. Note que na Figura 2.7.b as amplitudes dos refletores localizados na cunha salina são melhores imageados. O ruído de alta frequência possivelmente é consequência da aplicação do filtro Laplaciano que, por remover os efeitos de baixas frequências na imagem, deve ressaltar as altas frequências em algumas regiões da imagem.

- Degradação da amplitude com a profundidade

O imageamento da seção sedimentar localizada à esquerda nas imagens migradas das Figuras 2.3 e 2.4, imediatamente à esquerda do domo salino, é mostrado em detalhe na Figura 2.8.

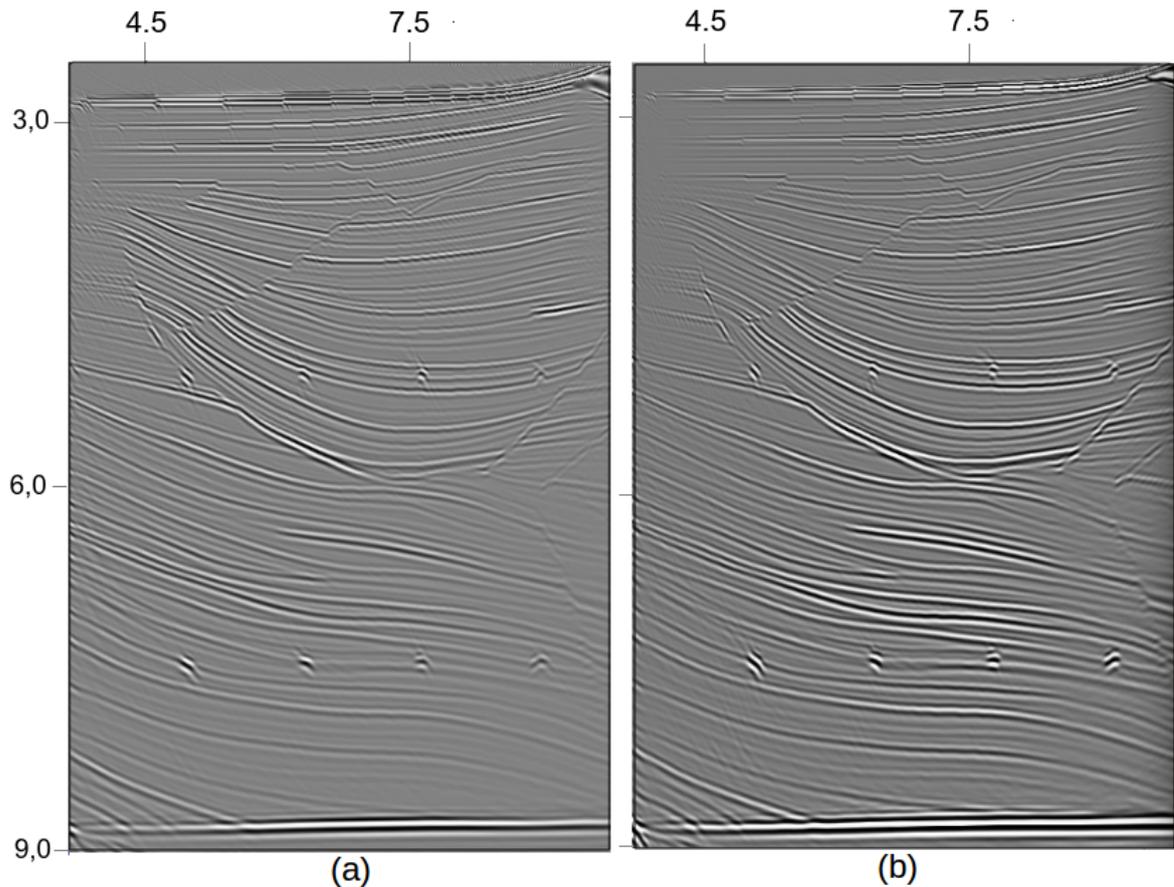


Figura 2.8: Imageamento da seção sedimentar à esquerda do modelo Sigsbee. Migração usando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (a) e migração com amplitude verdadeira (b).

A Figura 2.8 mostra que para regiões sem forte variação de velocidade, as condições de imagem oferecem resultados semelhantes. Mas, a imagem migrada usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano apresenta maior degradação da amplitude com a profundidade Figura 2.8.a que a oferecida pela condição de imagem de amplitude verdadeira Figura 2.8.b.

- Zonas de sombra

Dificuldades de imageamento devido baixa iluminação não são sanadas qualquer que seja a condição de imagem. As duas imagens migradas oferecem pouca informação a respeito da região localizada na zona de sombra (retângulo vermelho) nas Figuras 2.3 e 2.4. A aplicação da LSM para mitigar os efeitos de baixa iluminação necessita ser realizada independente da condição de imagem.

O enfoque desta dissertação consiste em realizar LSM no domínio da imagem por meio da condição de imagem de amplitude verdadeira. O objetivo é melhorar o resultado de LSM. Como mostramos neste capítulo, esta condição de imagem apresenta significativas vantagens em relação à condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano: maior

resolução e distribuição de amplitude mais coerente com os refletores em subsuperfície, atenuação de altas frequências, acurácia no imageamento de difratores e preservação da amplitude com a profundidade. Embora apresente ruído de retro-espalhamento, a imagem migrada não possui significativas degradações devido a presença deste artefato. Mostramos também que os efeitos da baixa iluminação não podem ser mitigados, independente da condição de imagem, fazendo com que a aplicação da LSM seja necessária.

3 MIGRAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS NO DOMÍNIO DA IMAGEM

Neste capítulo, discutimos inicialmente os aspectos gerais da LSM, seguido das especificações teóricas e práticas de quando esta é desenvolvida no domínio da imagem. Mostramos que LSM no domínio da imagem é aplicada através da realização de três etapas-chaves: 1- aplicação de um operador de modelagem linear, 2- aproximação da matriz Hessiana (\mathbf{H}) e 3- solução por otimização iterativa do sistema linear $\mathbf{H}\mathbf{m} = \mathbf{m}_{mig}$, em que \mathbf{m} é a refletividade do meio e \mathbf{m}_{mig} a imagem migrada. Mostramos que a aproximação da matriz Hessiana, as chamadas Point Spread Functions (PSFs), depende da realização de uma migração, etapa na qual as condições de imagem discutidas no capítulo anterior são aplicadas. Discutimos ainda três aspectos relevantes para o resultado da LSM: Janelamento das PSFs, interpolação das PSFs e regularização do sistema linear.

3.1 ASPECTOS GERAIS

Migração por Mínimos Quadrados é um método de inversão sísmica que, baseado na avaliação iterativa da solução de um sistema linear, que busca determinar o modelo de refletividade que gerou o respectivo dado sísmico. Este método vem sendo amplamente utilizado para obtenção de imagens migradas com maior resolução e para estimar os coeficientes de reflexão zero offset da subsuperfície com maior acurácia.

Esta demanda da LSM, como discutido por Claerbout (1992), é devida os operadores de modelagem/migração sísmica não serem unitários e como consequência, produzirem uma representação borrada da refletividade da Terra (Gelius et al., 2002).

A resolução da imagem migrada convencionalmente é controlada pelos parâmetros de aquisição (assinatura da fonte e geometria de aquisição) e das propriedades físicas do meio (velocidade e atenuação), (Valenciano et al., 2015). A Migração por Mínimos Quadrados busca gerar imagens migradas livres desses efeitos.

Para os algoritmos de inversão linear, o dado modelado \mathbf{d} , é tratado como o resultado da aplicação de um operador de modelagem linear \mathbf{L} à refletividade do meio \mathbf{m} (Snieder e Trampert, 1999)

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}\mathbf{m}. \quad (3.1)$$

O operador transposto \mathbf{L}^T é o adjunto do operador linear \mathbf{L} e definido como o operador de migração

$$\mathbf{L}^T \mathbf{d}_{obs} = \mathbf{m}_{mig}. \quad (3.2)$$

Em uma primeira abordagem, a função objetivo pode ser formulada como

$$\begin{aligned} J(\mathbf{m}) &= \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}\|^2, \\ &= \|\mathbf{Lm} - \mathbf{d}_{obs}\|^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que \mathbf{d}_{obs} é o dado observado.

Segundo Menke (1989), a solução de mínimos quadrados de inversão sísmica linear (3.1) que minimiza a função de custo quadrática (3.3) tem a seguinte forma

$$\mathbf{L}^T \mathbf{Lm} = \mathbf{L}^T \mathbf{d}, \quad (3.4)$$

podendo imediatamente ser reescrita como

$$\mathbf{m} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{d}. \quad (3.5)$$

Considerando a aproximação de Gauss-Newton da matriz Hessiana da função objetivo (3.3) $\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{H}$ e a expressão matricial que define a imagem migrada (3.2), a solução de mínimos quadrados (3.5) pode igualmente ser reescrita como

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{m}_{mig}. \quad (3.6)$$

As expressões (3.5) e (3.6) regem as duas principais abordagens para resolver o problema de inversão de refletividade na literatura. A primeira, indicada pela equação (3.5), resolve o sistema linear pela avaliação iterativa do operador de modelagem \mathbf{L} e de seu adjunto \mathbf{L}^T , a chamada Migração por Mínimos Quadrados no domínio do dado. Por exemplo, Nemeth et al. (1999); Prucha e Biondi (2002) e Kühl e Sacchi (2003).

A segunda abordagem, indicada pela equação (3.6), requer o cálculo explícito da matriz Hessiana, a chamada Migração por Mínimos Quadrados no domínio da imagem. Nessa abordagem, a refletividade é resolvida através da solução do sistema linear (3.6) no qual a matriz Hessiana e imagem migrada são conhecidas.

Da relação (3.6) podemos obter a seguinte representação matricial para a imagem migrada \mathbf{m}_{mig}

$$\mathbf{m}_{mig} = \mathbf{Hm}. \quad (3.7)$$

A equação (3.7) expressa que a imagem migrada \mathbf{m}_{mig} é obtida a partir de uma relação convolucional entre a refletividade verdadeira \mathbf{m} e a matriz Hessiana \mathbf{H} . A imagem migrada é explicada como uma versão filtrada da refletividade verdadeira, devido ao efeito de borramento provocado pela matriz Hessiana. Para este problema, a função objetivo pode

ser restabelecida como

$$J(\mathbf{m}) = \|\mathbf{H}\mathbf{m} - \mathbf{m}_{mig}\|^2, \quad (3.8)$$

em que a refletividade que minimiza (3.8) é dada por

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{m}_{mig}. \quad (3.9)$$

As equações (3.8) e (3.9) sintetizam o método da LSM no domínio da imagem como um processo que visa aplicar uma deconvolução na imagem migrada para remover o efeito de borramento provocado pela matriz Hessiana. Nas próximas seções, detalhamos os três passos fundamentais para aplicação desta metodologia descritos no início do capítulo e que basicamente consistem em determinar as componentes do sistema linear (3.9).

3.2 A APROXIMAÇÃO BORN

A equação da onda (2.1) apresentada no capítulo anterior e reescrita abaixo na forma

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) + f(t, \mathbf{x}), \quad (3.10)$$

apresenta uma relação não linear entre a velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$ e campo de onda $p(\mathbf{x}, t)$. Sendo a expressão que governa o operador de modelagem nos problemas da RTM, sua aplicabilidade no problema de Migração por Mínimo Quadrados requer sua forma linearizada. Na literatura, a aproximação Born é a forma mais usual de se obter linearização do problema direto, por exemplo, em Snieder (2004). Esta metodologia deriva da aplicação da teoria das perturbações que, a partir de uma solução conhecida, visa obter uma solução aproximada de problemas que, em algum sentido, são próximos ao problema conhecido (Ikelle e Amundsen, 2018).

No caso dos problemas baseados na equação da onda, a solução que conhecemos corresponde ao comportamento não linear entre o campo de onda e o parâmetro do modelo. Desejamos obter uma solução próxima a esta, mas que apresente um comportamento linear.

Aplicando a teoria da perturbação de primeira ordem no parâmetro físico do meio $c(\mathbf{x})$

$$c(\mathbf{x}) = c_0(\mathbf{x}) + \delta c(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

consequentemente o campo de onda apresentará perturbação proporcional a δp

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0(t, \mathbf{x}) + \delta p(t, \mathbf{x}). \quad (3.12)$$

Substituindo as perturbação (3.11) e (3.12) na equação da onda (3.10), obtemos

$$\frac{1}{[c_0(\mathbf{x}) + \delta c(\mathbf{x})]^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [p_0(t, \mathbf{x}) + \delta p(t, \mathbf{x})] - \nabla^2 [p_0(t, \mathbf{x}) + \delta p(t, \mathbf{x})] = f(t, \mathbf{x}), \quad (3.13)$$

a expressão acima pode ser igualmente escrita como

$$\left[\frac{1}{c_0^2(\mathbf{x})} - \frac{2\delta c(\mathbf{x})}{c_0^3(\mathbf{x})} \right] \left[\frac{\partial^2 p_0(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \delta p(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} \right] - [\nabla^2 p_0(t, \mathbf{x}) + \nabla^2 \delta p(t, \mathbf{x})] = f(t, \mathbf{x}). \quad (3.14)$$

A multiplicação do primeiro termo de (3.14) gera termos com perturbação de segunda ordem em (δc) e (δp) . Perturbação de primeira ordem descrevem único espalhamento do campo de onda, de segunda ordem, espalhamentos duplos e assim por diante (Snieder (2004)), como esquematiza a Figura 3.1.

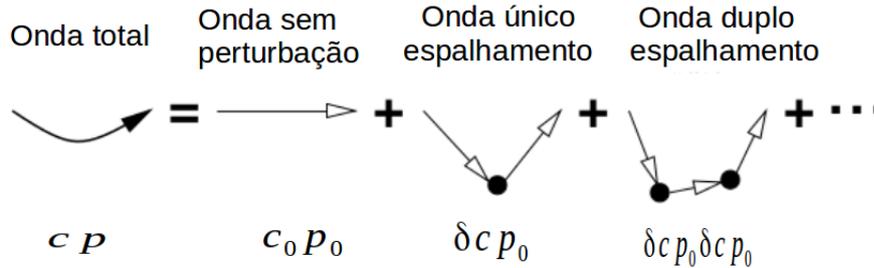


Figura 3.1: Representação do espalhamento do campo de onda de acordo com a ordem de espalhamento. Modificada de Snieder (2004).

Estamos interessados somente no espalhamento primário do campo de onda. Para esta finalidade, considera-se que os termos de perturbações superiores à primeira ordem podem ser negligenciáveis (Tarantola, 2005). A equação (3.14) torna-se

$$\frac{1}{c_0^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 \delta p(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p(t, \mathbf{x}) = \frac{2\delta c(\mathbf{x})}{c_0^3(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p_0(t, \mathbf{x})}{\partial t^2}. \quad (3.15)$$

A expressão (3.15) corresponde à equação da onda linearizada formulada a partir da chamada aproximação de Born. A linearização corresponde ao fato de que uma perturbação no parâmetro do modelo, referente ao termo fonte (lado direito de (3.15)), gera uma perturbação no campo de onda $(\delta p(t, \mathbf{x}))$.

A solução de (3.15) consiste em decompor o meio em duas partes: uma no modelo de referência, também chamado de modelo fundo $c_0(\mathbf{x})$ e a outra, em função da perturbação do modelo, $\delta c(\mathbf{x})$. A onda que viaja da fonte ao receptor, no meio de referência, corresponde ao campo de onda sem perturbação, $p_0(t, \mathbf{x})$ (necessária avaliação por compor o termo fonte), enquanto que o campo que inclui interação com o modelo perturbado configura o campo de onda espalhado $\delta p(t, \mathbf{x})$, como mostra a Figura 3.2.

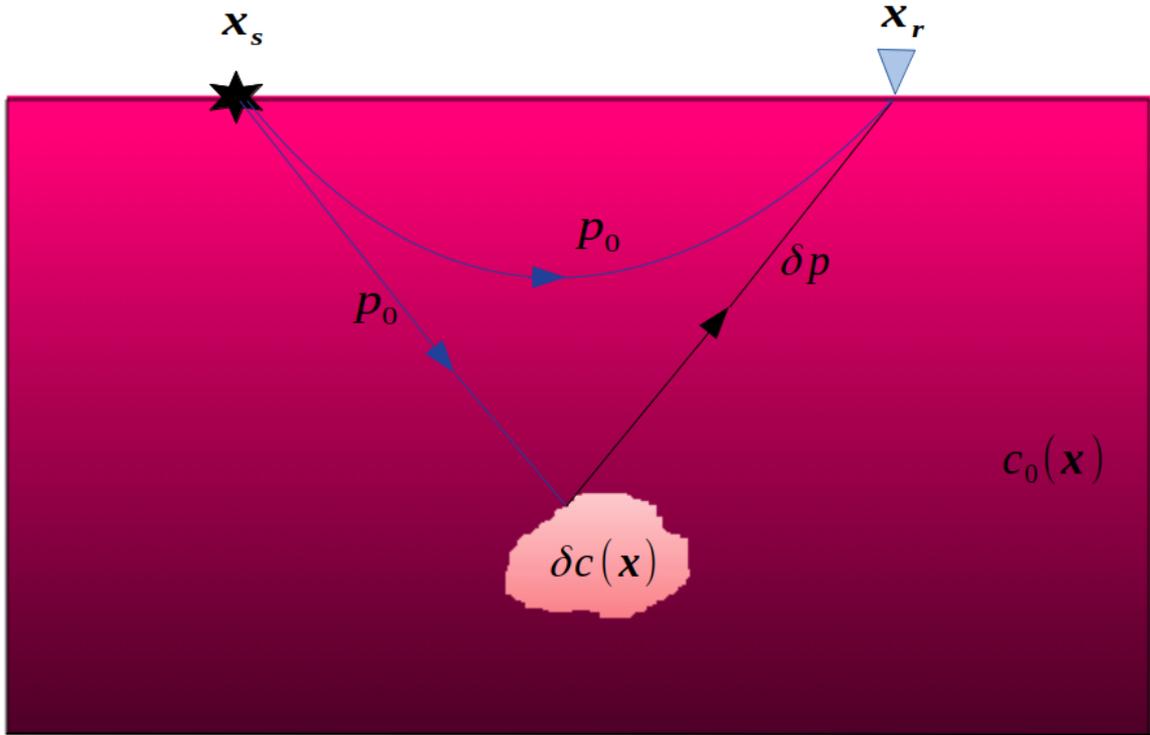


Figura 3.2: Configuração do problema de espalhamento do campo de onda. O meio é decomposto em um meio de referência (c_0) e em um meio espalhador (δc). O primeiro gera um campo de onda sem perturbação (p_0) e o segundo, um campo espalhado (δp).

3.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE MÍNIMOS QUADRADOS NA INVERSÃO SÍSMICA LINEAR

Considere a equação da onda linearizada (3.15) no domínio da frequência

$$\frac{\omega^2}{c_0^2(\mathbf{x})} \tilde{\delta p}(\omega, \mathbf{x}) + \nabla^2 \tilde{\delta p}(\omega, \mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) \omega^2 \tilde{p}_0(\omega, \mathbf{x}), \quad (3.16)$$

em que $m(\mathbf{x}) = \frac{2\delta c(\mathbf{x})}{c_0^3(\mathbf{x})}$. Sob a condição de fronteira homogênea, temos a seguinte expressão para o teorema da representação (Aki e Richards (2002)),

$$\tilde{\delta p}(\omega, \mathbf{x}) = \omega^2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) \tilde{p}_0(\omega, \mathbf{x}) m(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.17)$$

Sabendo que campo no meio de referência \tilde{p}_0 pode ser expresso em termos da função de Green da seguinte forma

$$\tilde{p}_0(\omega, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) S(\omega), \quad (3.18)$$

em que $S(\omega)$ é o pulso fonte, a equação (3.17) pode ser reescrita como

$$\tilde{\delta p}(\omega, \mathbf{x}) = S(\omega) \omega^2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) m(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.19)$$

A solução (3.19) é a solução da equação da onda linearizada (3.15) e representa o dado Born calculado (\mathbf{d}_B^c) devido a uma perturbação no parâmetro do modelo. O problema da inversão sísmica linear tenta ajustar o resíduo entre o dado observado e o calculado no meio de referência (\mathbf{d}_B)

$$\mathbf{d}_B = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^c, \quad (3.20)$$

e o dado Born calculado. O funcional que queremos minimizar pode ser expresso da seguinte forma

$$J(m) = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r [\mathbf{d}_B(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s) - \mathbf{d}_B^c(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s)]^2. \quad (3.21)$$

Considerando a expressão que governa o cálculo do dado Born (3.19), o funcional acima pode igualmente ser escrito como

$$J(m) = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \left[\mathbf{d}_B(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s) - S(\omega) \omega^2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) m(\mathbf{x}) d\Omega \right]^2. \quad (3.22)$$

Avaliando a variação de primeira ordem no funcional (3.22), temos que

$$\delta J(m) = - \sum_s \sum_r S(\omega) \omega^2 \int_{\Omega(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \delta m(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}') \\ \left[\mathbf{d}_B(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s) - S(\omega) \omega^2 \int_{\Omega(\mathbf{x}')} G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_s) m(\mathbf{x}') d\Omega \right], \quad (3.23)$$

podendo ser reorganizada da seguinte forma

$$\delta J(m) = \int_{\Omega(\mathbf{x})} d\Omega(\mathbf{x}) \delta m(\mathbf{x}) \left[\sum_s \sum_r \left(- \omega^2 S(\omega) G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \mathbf{d}_B(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s) \right. \right. \\ \left. \left. + [\omega^2 S(\omega)]^2 \int_{\Omega(\mathbf{x}')} G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_s) G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) m(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \right) \right]. \quad (3.24)$$

Exigindo que a variação do funcional seja nula qualquer que seja a perturbação δm , os termos entre colchetes da expressão (3.24) devem se nular, levando à seguinte relação

$$[\omega^2 S(\omega)]^2 \int_{\Omega(\mathbf{x}')} d\Omega(\mathbf{x}') \left[\sum_s \sum_r G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_s) G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}') G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \right] m(\mathbf{x}') = \\ \omega^2 S(\omega) \sum_s \sum_r G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \mathbf{d}_B(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s). \quad (3.25)$$

O termo do lado direito da expressão (3.25) refere-se à migração do dado Born, que pela equação (3.20) equivale ao resíduo (\mathbf{r}) entre o dado observado e o dado calculado no meio de fundo

$$\mathbf{L}^T \mathbf{r} = \sum_s \sum_r \omega^2 S(\omega) G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) [\mathbf{d}^{obs}(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s) - \mathbf{d}^c(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s)], \quad (3.26)$$

e o termo do lado direito representa a convolução da matriz Hessiana com o meio

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m} = [\omega^2 S(\omega)]^2 \sum_s \sum_r \int_{\Omega(\mathbf{x}')} d\Omega(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_s) G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) m(\mathbf{x}'), \quad (3.27)$$

em que a expressão que governa a matriz Hessiana nos problemas de inversão sísmica linear é dada por

$$\mathbf{H} = [\omega^2 S(\omega)]^2 \sum_s \sum_r \int_{\Omega(\mathbf{x}')} d\Omega(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_s) G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s), \quad (3.28)$$

Devido ao alto custo computacional envolvido no cálculo da matriz Hessiana (3.28), várias formas de aproximação já foram propostas pela literatura. Como aproximá-la através dos elementos de maior energia, ou seja, os elementos da sua diagonal (Shin et al., 2001); aproximação de Born para Hessiana (Plessix e Mulder, 2004) e (Guitton, 2004) que propôs aproximar o inverso da matriz Hessiana através de um banco de filtros de correspondência não estacionários.

O estado da arte desta metodologia para as aplicações em LSM no domínio da imagem consiste em aproximar a matriz Hessiana por meio da função de espalhamento pontual, do inglês Point Spread Function (PSF). Tal como usada para o desenvolvimeto deste trabalho e que detalhamos na próxima seção.

3.3.1 Aproximação da matriz Hessiana via Point Spread Function

A utilização das PSFs como aproximação da matriz Hessiana é mais intuitivo e comparativo que matemático. Do ponto de vista óptico, PSF é definida como sendo a resposta ao impulso de um sistema óptico focalizado. Dado um objeto pontual, a resposta impulsiva, quando este é submetido a um sistema focal, refere-se a um ponto desfocalizado, cujo desfoque é configurado pela PSF.

Este conceito é convencionalmente utilizado no processamento de imagens astronômicas, uma vez que grande parte dos objetos observados são pontuais. A partir de observações via instrumentos astronômicos, um dado objeto espacial é detectado, mas de forma "borrada". Este ponto borrado é resultado da convolução entre o objeto e a função de borramento,

a chamada PSF do sistema óptico do instrumento, Figura 3.3. Compensando o efeito da função de borramento, a imagem do objeto espacial pode então ser obtida com maior resolução.

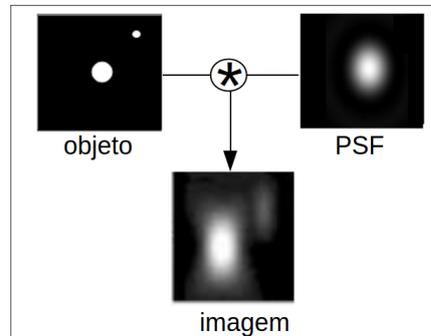


Figura 3.3: Representação da resposta impulsiva de um sistema óptico focalizado. O ponto imagem é resultado da convolução entre o objeto pontual e a PSF.

Por analogia, a equação (3.7) expressa exatamente o mesmo resultado. Cada ponto na imagem migrada \mathbf{m}_{mig} é resultado da convolução entre a refletividade de ponto único (\mathbf{m}) com a matriz Hessiana (\mathbf{H}). Aqui, o ponto imagem refere-se a uma versão borrada do ponto de refletividade, cujo função de borramento é definida pela matriz Hessiana. Logo, a matriz Hessiana pode ser validamente pensada como função de espalhamento pontual. Remover o efeito da Hessiana produz imagens migradas com maior resolução e esta é a essência da LSM no domínio da imagem.

A grande contribuição associativa de pensar na PSF como aproximação da matriz Hessiana para os problemas de imageamento sísmico refere-se à Lecomte (2008) em seu trabalho a cerca da resolução e iluminação de imagens migradas, no qual abordagem baseia-se na teoria do raio. A utilização da PSF como aproximação da matriz Hessiana para os problemas de mínimos quadrados no domínio da imagem possui grande contribuição do trabalho de Valenciano (2008).

No imageamento sísmico, a PSF para um valor unitário de propriedade física é obtida da resposta ao impulso à modelagem seguida de migração, como esquematiza a Figura 3.4.

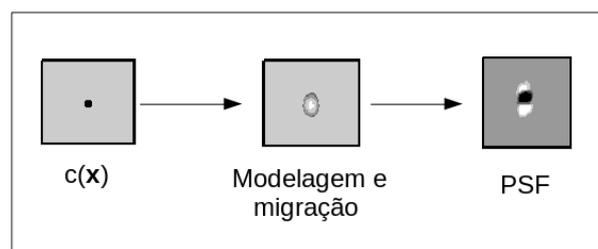


Figura 3.4: Esquema para estimativa das PSFs no imageamento sísmico. Ao serem aplicados os processos de modelagem seguida de migração em um ponto difrator com valor de velocidade $c(\mathbf{x})$, o resultado é a PSF referente a este ponto.

Na prática, as PSFs são obtidas amostrando uma malha regular de pontos espalhadores de valores de velocidade, esta corresponde às perturbação para a modelagem Born. O dado Born é migrado através de um modelo de velocidade suavizado, o mesmo utilizado para obtenção da imagem migrada. No capítulo 4 discutimos o efeito na LSM da amostragem da malha de pontos para a PSF. A Figura 3.5 mostra o resultado das PSFs obtidas para uma malha de pontos amostrados via perturbação do modelo de velocidade do Marmousi.

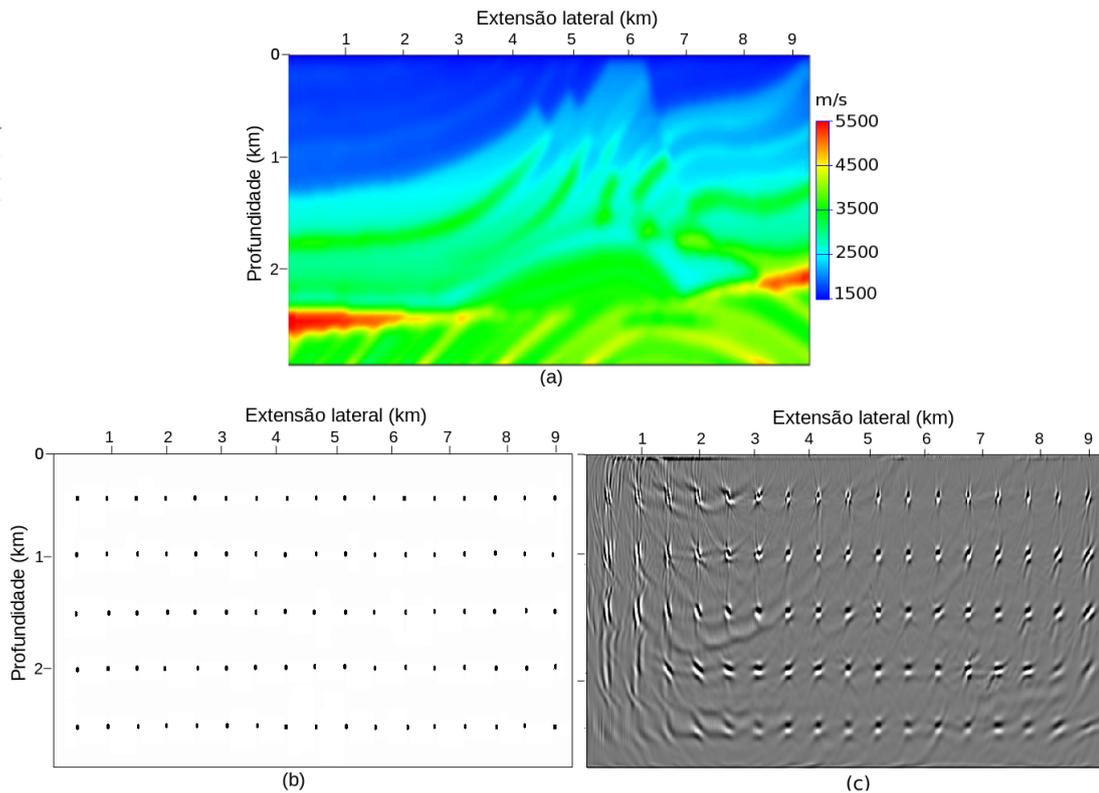


Figura 3.5: PSFs geradas para um grid regular de pontos no modelo de velocidade do Marmousi. (a) Modelo de velocidade suavizado do Marmousi, (b) pontos espalhadores com valores de perturbação referentes aos mesmos pontos no modelo suavizado e (c) resultado da PSF para cada ponto.

Na Figura 3.5, cada PSF expressa a matriz Hessiana associada àquele ponto na imagem migrada. As PSFs para os pontos que não são amostrados na malha são obtidas a partir de técnicas de interpolação.

Além de aproximar a matriz Hessiana para cada ponto, o resultado das PSFs fornece uma estimativa da resolução da imagem migrada para cada ponto do modelo (Carotti et al., 2017). PSFs borradas e pouco focalizadas são referentes às localizações do modelo com baixa iluminação. Na imagem migrada, essas localizações referem-se às regiões pobremente imageadas. Por outro lado, as regiões onde as PSFs apresentam-se bem focalizadas fazem referência às regiões do modelo com maior qualidade de imageamento.

Outra característica observada nas PSFs é o caráter direcional. Segundo Valenciano (2008), a direção com máximo espalhamento configura o eixo de baixa iluminação e sua

perpendicular o eixo de alta resolução.

3.4 DECONVOLUÇÃO DA IMAGEM MIGRADA

O objetivo da LSM no domínio da imagem consiste em remover o efeito de borramento da imagem migrada provocado pela matriz Hessiana. Sendo a imagem migrada resultado da convolução entre a refletividade do meio e a Hessiana, este processo é caracterizado como a aplicação de deconvolução na imagem migrada e é regido pela equação matricial (3.9), reescrita abaixo.

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{m}_{mig}, \quad (3.29)$$

em que a matriz Hessiana \mathbf{H} é aproximada através das PSFs. Antes de discutirmos os aspectos numéricos da solução de (3.29), abordaremos alguns aspectos peculiares à utilização dessas PSFs para obtenção da imagem deconvolvida, como janelamento e interpolação.

3.4.1 Janelamento das Point Spread Functions

A utilização de uma PSF como aproximação da matriz Hessiana, para um determinado ponto da imagem migrada, requer que cada PSF seja extraída do plano imagem na qual foi gerada. Nossos experimentos mostraram que a extração de uma PSF e utilização direta no algoritmo de otimização gera imagens deconvolidas com artefatos ruidosos e descontinuidades, à medida que se busca um melhor ajuste da função objetivo (3.6). A aplicação de janelamento nas PSFs pode mitigar esses efeitos. Neste trabalho utilizamos a janela Nuttall para este finalidade.

A escolha do tamanho da janela de amostragem da PSF é um fator crítico do resultado da LSM-domínio da imagem. Considerando lx e lz o espaçamento entre cada PSF na malha, a janela de amostragem de uma PSF deve ser uma fração desse espaçamento, escolhida de modo que não seja grande o suficiente para apresentar contribuição da PSF vizinha, e não tão pequena de modo valores da PSF sejam negligenciados.

A amostragem da janela não é geral, uma vez que o tamanho e formato de cada PSF depende da iluminação da fonte e do valor de velocidade no ponto espalhador. Nesta abordagem, testamos diferentes tamanhos de janela através de experimentos para que o tamanho ótimo, para a nossa aplicação, fosse determinado. Obtemos o resultado da fração $lx/4$ e $lz/4$ para cada lado a partir da origem da PSF, que é conhecida. Em seguida, discutimos a aplicação do janelamento Nuttall através do tamanho ótimo estimado para a janela de amostragem da PSF.

Considere as distâncias $Jx = lx/4$ e $Jz = lz/4$, em pontos de amostragem, a partir do centro da PSF. Podemos definir o raio de dispersão (σ_r) que concentra maior energia da

PSF através da média harmônica ponderada da distância radial ($r_{i,j}$), utilizando como ponderação o valor absoluto da amplitude da PSF. A amplitude da PSF em cada ponto da malha é denotada por $R_{i,j}$

$$\sigma_r \equiv \frac{\sum |R_{i,j}|}{\sum |R_{i,j}|/r_{i,j}}, \quad (3.30)$$

em que $r_{i,j} = \sqrt{x_{i,j}^2 + z_{i,j}^2}$. A Figura 3.6 mostra os elementos da expressão (3.30) de forma esquemática.

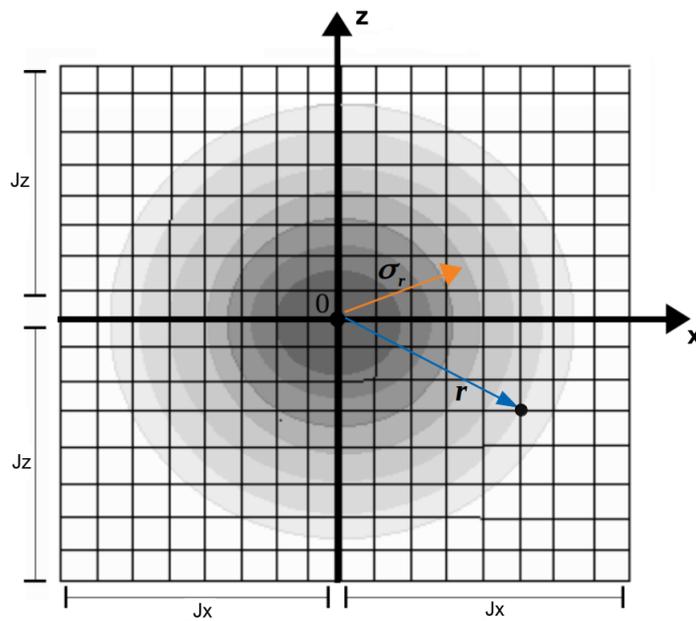


Figura 3.6: Esquematização para estimativa do raio de dispersão da PSF. O ponto em que os eixos de cruzam representa o centro da PSF. Cada ponto na malha (i, j) possui um valor de amplitude $R_{i,j}$ da PSF e uma distância r a partir da origem .

O valor de σ_r varia para cada PSF, uma vez que cada uma possui formato e amplitudes diferentes dependendo da iluminação da fonte e do valor de velocidade na localização do ponto espalhador.

A aplicação da janela Nuttall é governada pela expressão (3.31) (Heinzel et al., 2002).

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right). \quad (3.31)$$

em que $a_0 = 0.355768, a_1 = 0.487396, a_2 = 0.144232$ e $a_3 = 0.0012604$ são os coeficientes ótimos da janela e N é a dimensão em amostras da janela. Para garantir que a janela Nuttall atue em toda a PSF, não somente na região de maior dispersão, o janelamento deve ser aplicado em um raio maior que σ_r . Tomamos para o valor de L o menor inteiro maior que $2\sigma_r$. Conseqüentemente, a janela Nuttall possui largura $N = 2L + 1$.

O resultado da aplicação da janela Nuttall para um plano imagem de PSFs é mostrado

na Figura 3.7, note que os efeitos das bordas foram removidos.

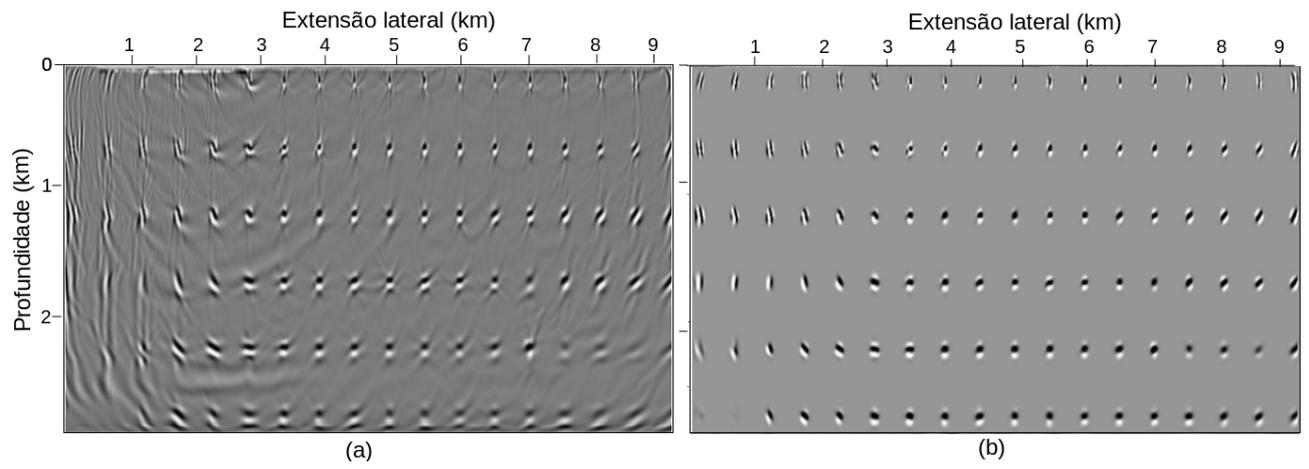


Figura 3.7: Janelamento Nuttall para um plano de PSFs. PSFs sem janelamento em (a) e PSFs janeladas em (b).

3.4.2 Interpolação das Point Spread Functions

A interpolação das PSFs é um aspecto relevante para o resultado da imagem deconvolvida. Neste trabalho, usamos a interpolação bilinear para estimativa das PSFs nos pontos da malha que estas não são amostradas.

A implementação consiste em, dado um ponto no espaço da imagem migrada, deve-se localizar as quatro PSFs em torno desse ponto para serem utilizadas no cálculo da PSF a ser interpolada, como esquematiza a Figura 3.8.

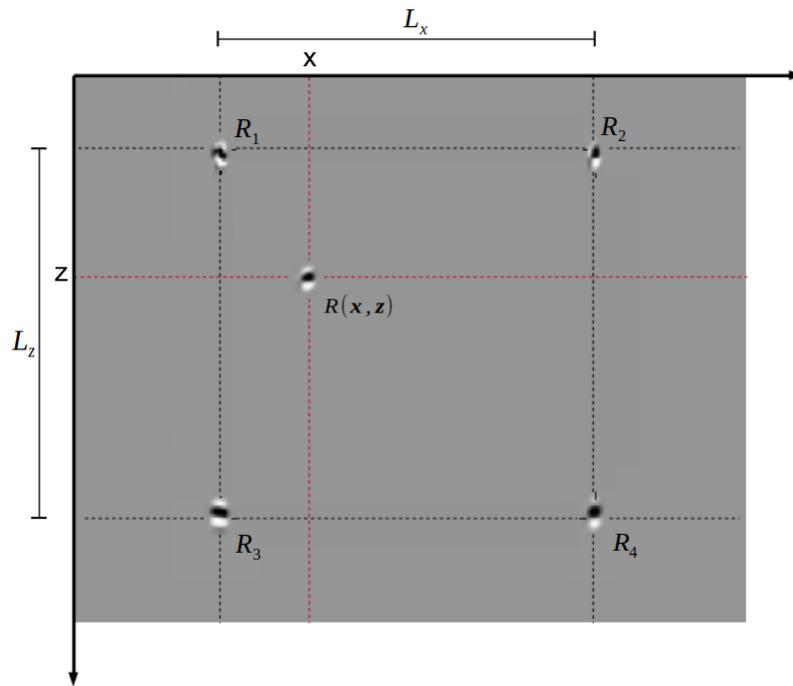


Figura 3.8: Esquema para interpolação bilinear das PSFs. Dado um ponto onde se deseja obter uma PSF interpolada $R(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, deve-se localizar as quatro PSFs em torno deste ponto para serem utilizadas no cálculo da interpolação.

Para interpolar uma PSF com centro na posição \mathbf{x} , utilizamos a interpolação bilinear:

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= w_1 R_1(\mathbf{x}_1 + \Delta\mathbf{x}) \\
 &+ w_2 R_2(\mathbf{x}_2 + \Delta\mathbf{x}) \\
 &+ w_3 R_3(\mathbf{x}_3 + \Delta\mathbf{x}) \\
 &+ w_4 R_4(\mathbf{x}_4 + \Delta\mathbf{x}),
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

em que os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ e \mathbf{x}_4 , a partir de cada um dos centros, referem-se à origem das respectivas PSFs e $\Delta\mathbf{x}$ um mesmo deslocamento desta posição. Os pesos w_j são dados po

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{(x_3 - x)(z_2 - z)}{L_x L_z} \\
w_2 &= \frac{(x_4 - x)(z - z_1)}{L_x L_z} \\
w_3 &= \frac{(x - x_1)(z_2 - z)}{L_x L_z} \\
w_4 &= \frac{(x - x_2)(z - z_1)}{L_x L_z},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

3.4.3 Atualização do modelo

O modelo, imagem deconvolvida, é obtido através da solução iterativa do sistema linear (3.7), reescrito abaixo.

$$\mathbf{m}_{mig} = \mathbf{H}\mathbf{m}. \tag{3.34}$$

Comumente este problema é resolvido através do algoritmo de otimização Gradiente Conjugado (Fletcher et al. (2016), Yang et al. (2016) e Valenciano (2008)). Nossos resultados também são apresentados em termos da aplicação de Gradiente Conjugado como método de otimização, cujo algoritmo encontra-se detalhado em Golub e Van Loan (2012).

O sistema linear da equação (3.34) é mal-condicionado quando a iluminação da sub-superfície é irregular (Valenciano, 2008). Essas irregularidades surgem quando zonas de baixa iluminação são presentes, como acontece quando corpos salinos compõem o sistema estrutural do modelo, bem como estruturas com propriedades físicas semelhantes. Segundo Clapp (2005), as zonas de sombra estão relacionadas essencialmente ao espaço nulo da inversão. Os locais do modelo que correspondem ao espaço nulo nos dados podem ser preenchidos com ruído, possivelmente fazendo com que a inversão divirja. Sob essas condições, é indicado aplicar regularização no sistema linear.

Uma das formas mais simples de se aplicar regularização é adicionar um fator de amortecimento (λ) que penaliza o aumento dos valores do modelo. Sob essas condições, o sistema linear (3.34) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{mig} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.35}$$

A equação (3.35) refere-se à forma que utilizamos para solução numérica do sistema linear. Quanto menor o valor do parâmetro λ , o algoritmo de otimização busca oferecer um melhor ajuste entre as imagens da função objetivo (3.8), reescrita abaixo

$$J(\mathbf{m}) = \|\mathbf{H}\mathbf{m} - \mathbf{m}_{mig}\|^2. \tag{3.36}$$

Por outro lado, um valor muito pequeno de λ pode gerar imagens ruins devido a busca de um ajuste que não pode ser explicado pela imagem migrada ou pela Hessiana. Aqui, o valor ótimo de λ foi testado manualmente.

A cada iteração, o sistema linear (3.35) é resolvido. Para isto, cada ponto na imagem migrada utiliza a PSF correspondente àquele ponto, caracterizando-se com uma linha da matriz Hessiana. Para os pontos nos quais não foram geradas PSFs, a interpolação é aplicada (durante a solução do sistema linear). O resultado é o modelo \mathbf{m} obtido do processo de deconvolução,

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{m}_{mig}, \quad (3.37)$$

que minimiza a função de custo quadrática (3.36). O processo iterativo finaliza quando a função de custo oferece o melhor ajuste quanto se deseja.

Esta dissertação consiste em determinar a imagem deconvolvida (\mathbf{m}) através da utilização da condição de imagem de amplitude verdadeira (equação (2.9)) na construção da imagem migrada e das PSFs. Para termos de comparação, utilizamos também a condição de imagem clássica regida pela equação (2.4). Para estes dois casos, o sistema (3.35) pode ser especificado, respectivamente, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^v \\ \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{m}^v = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{mig}^v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c \\ \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{m}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{mig}^c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

4 APLICAÇÃO, RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, apresentamos resultados da LSM usando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e a condição de amplitude verdadeira, através do dado sintético do Marmousi. Mostramos que a LSM usando a condição de imagem de amplitude verdadeira oferece melhores resultados em comparação com a usando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano. Por fim, discutimos os fatores relevantes para o resultados da deconvolução.

4.1 DECONVOLUÇÃO DAS IMAGENS MIGRADAS

Utilizamos o dado sintético do Marmousi para aplicação da metodologia de LSM abordada nos capítulos anteriores. O modelo de velocidade suavizado é mostrado na Figura 4.1.

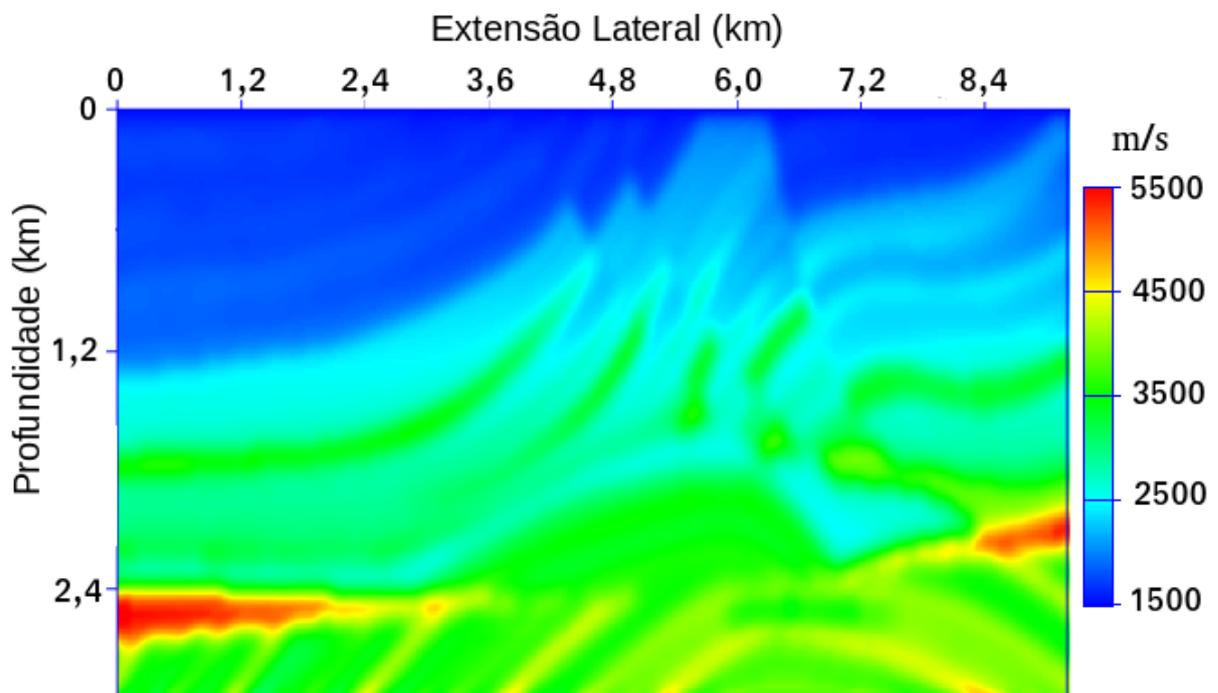


Figura 4.1: Modelo de velocidade suavizado do Marmousi.

A discretização do modelo para implementação numérica e a geometria de aquisição para obtenção dos dados, são mostradas nas Tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente.

Número de amostras na horizontal	767
Número de amostras na vertical	243
Intervalo de amostragem na horizontal (em metros)	12.0
Intervalo de amostragem vertical (em metros)	12.0

Tabela 4.1: Discretização do modelo de velocidade Marmousi utilizado para gerar as PSFs e a LSM.

Número de fontes	240
Primeira fonte (em metros)	3000
Intervalo entre as fontes (em metros)	25
Número de receptores	96
Offset mínimo (em metros)	150
Offset máximo (em metros)	2525

Tabela 4.2: Geometria de aquisição correspondente aos resultados das PSFs e a LSM.

Para aproximação da matriz Hessiana via Point Spread Function, aplicamos a modelagem Born em uma malha regular com valores de perturbação pontual referente ao modelo de velocidade suavizado. O dado Born migrado a partir das condições de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e de amplitude verdadeira produziu as PSFs mostradas, já sob efeito da janela radial Nuttall, nas Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

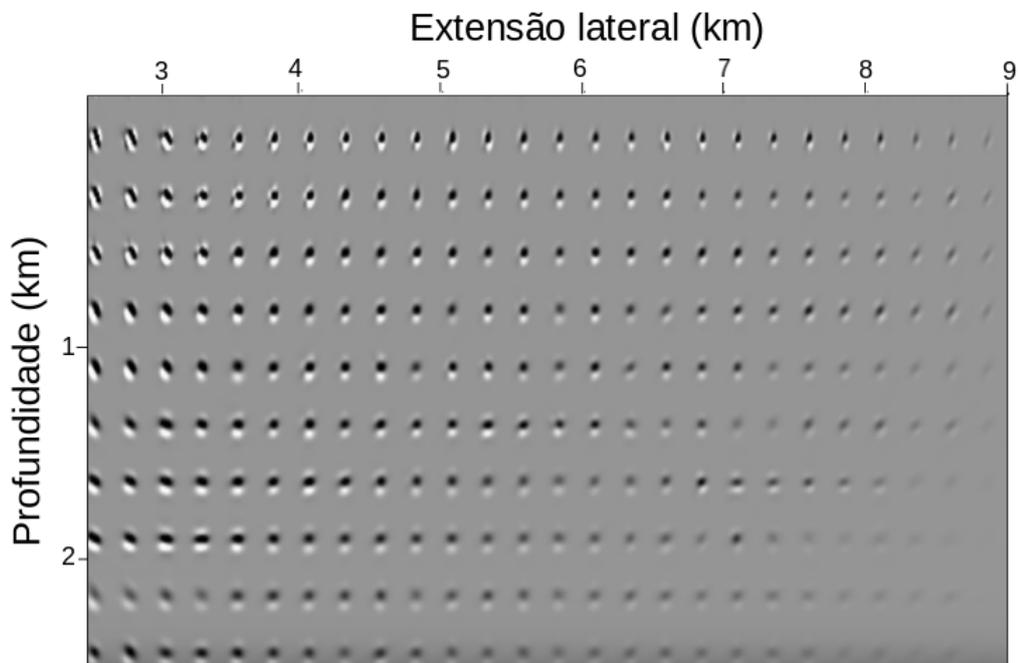


Figura 4.2: Point Spread functions produzidas a partir da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano.

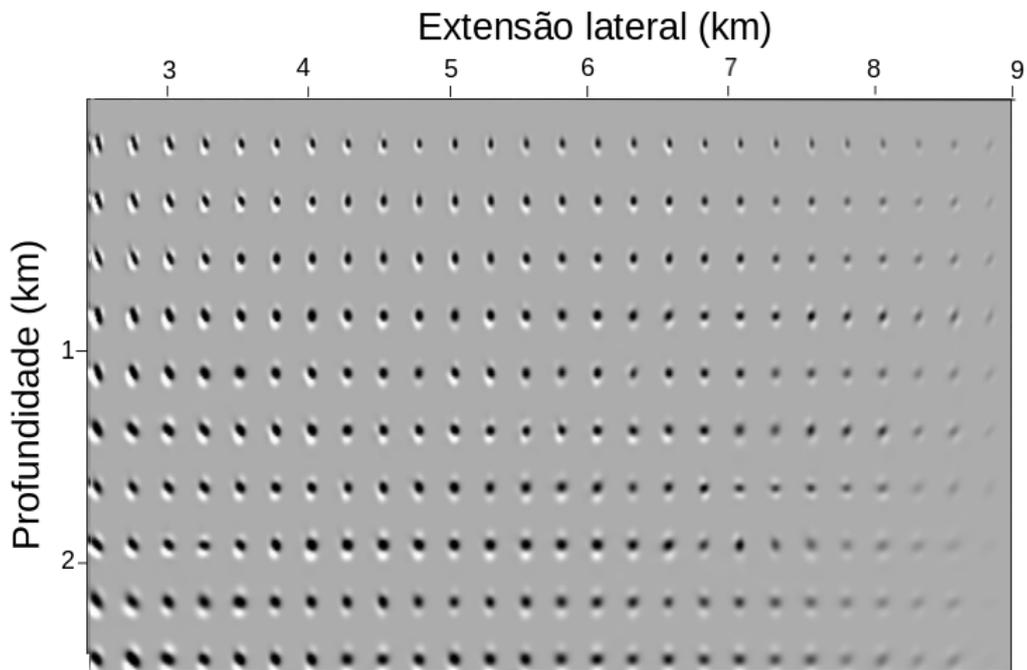


Figura 4.3: Point Spread functions produzidas a partir da condição de imagem de amplitude verdadeira.

A implementação numérica requer que, dependendo da distância entre as PSFs, estas sejam obtidas em diferentes planos imagem para que não haja interferência de uma PSF sobre a outra durante o processo de migração. Nesta implementação, quatro diferentes planos de PSFs foram obtidos, de modo que as imagens das Figuras 4.2 e 4.3 representa a soma desses quatro planos, resultando em um espaçamento de 250 metros entre cada PSF.

De maneira geral, as PSFs da Figura 4.3 apresentam-se melhor focalizadas que as mostradas na Figura 4.2, isso é mais notório nas regiões mais profundas do modelo, onde as PSFs da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano possuem menor resolução e amplitude em relação às demais. Nessas regiões, o modelo de velocidade do Marmousi configura maior complexidade estrutural, dobras e camadas de sal fazem-se presentes (Figura 4.1), oferecendo dificuldade de imageamento para esta condição de imagem. Por outro lado, as PSFs obtidas da condição de imagem de amplitude verdadeira apresentam amplitude e resolução mais regular ao longo do modelo, mesmo para as regiões mais profundas. Mas ainda podemos observar redução de amplitude nas regiões com menor iluminação.

As imagens migradas do dado sintético Marmousi utilizando as condições de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e de amplitude verdadeira são mostradas nas Figuras 4.4 e 4.5, respectivamente.

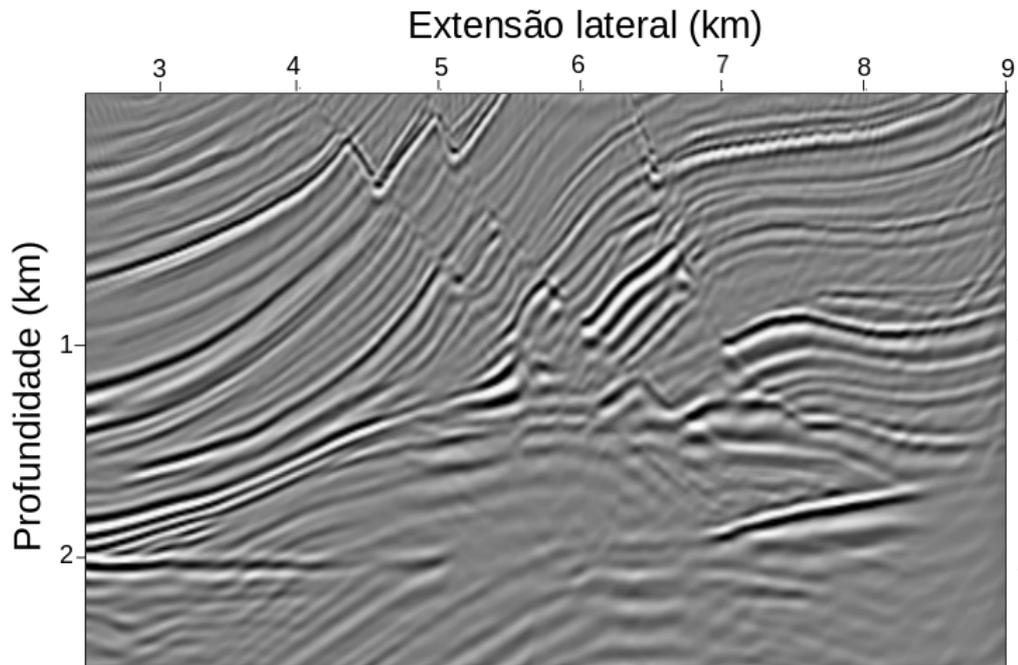


Figura 4.4: Migração RTM do dado Marmousi utilizando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano.

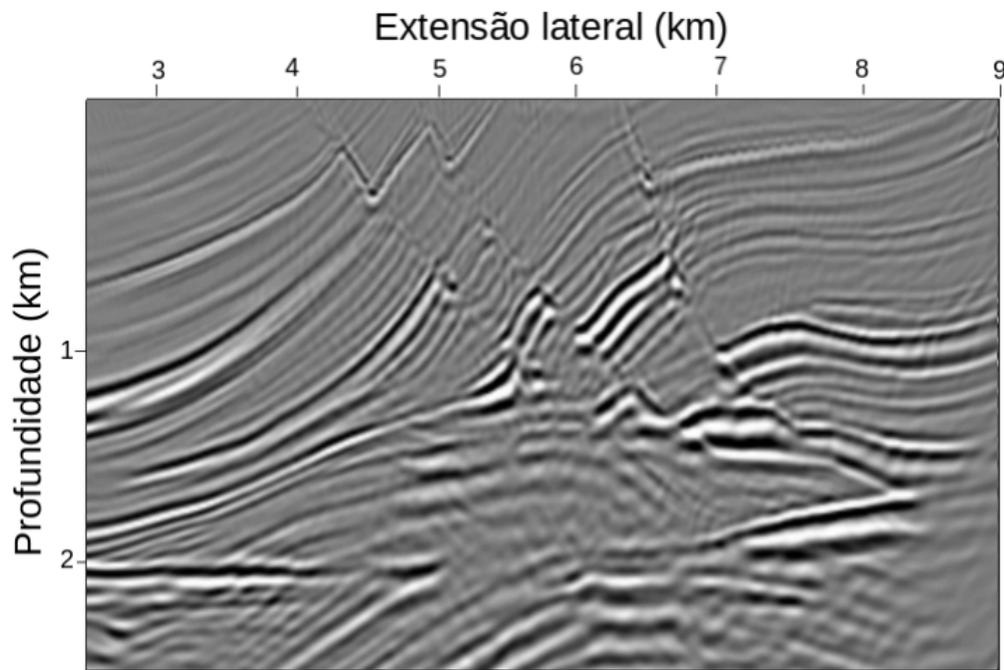


Figura 4.5: Migração RTM do dado Marmousi utilizando a condição de imagem com amplitude verdadeira.

As imagens migradas das Figuras 4.4 e 4.5 compreendem apenas a região melhor imageada pela geometria de aquisição da tabela 4.2 . A imagem migrada com amplitude verdadeira apresenta melhor definição dos refletores, principalmente na parte mais profunda do modelo.

A distribuição de amplitude na Figura 4.5 apresenta maior correlação com a refletividade verdadeira do modelo Marmousi (Figura 4.6), na qual camadas mais rasas e com menores contrastes de impedância apresentam amplitudes inferiores às das interfaces mais profundas, que possuem maior contraste de velocidade, como mostra o modelo de velocidade da Figura 4.1. Estas características não estão presentes na imagem migrada usando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano, Figura 4.4.

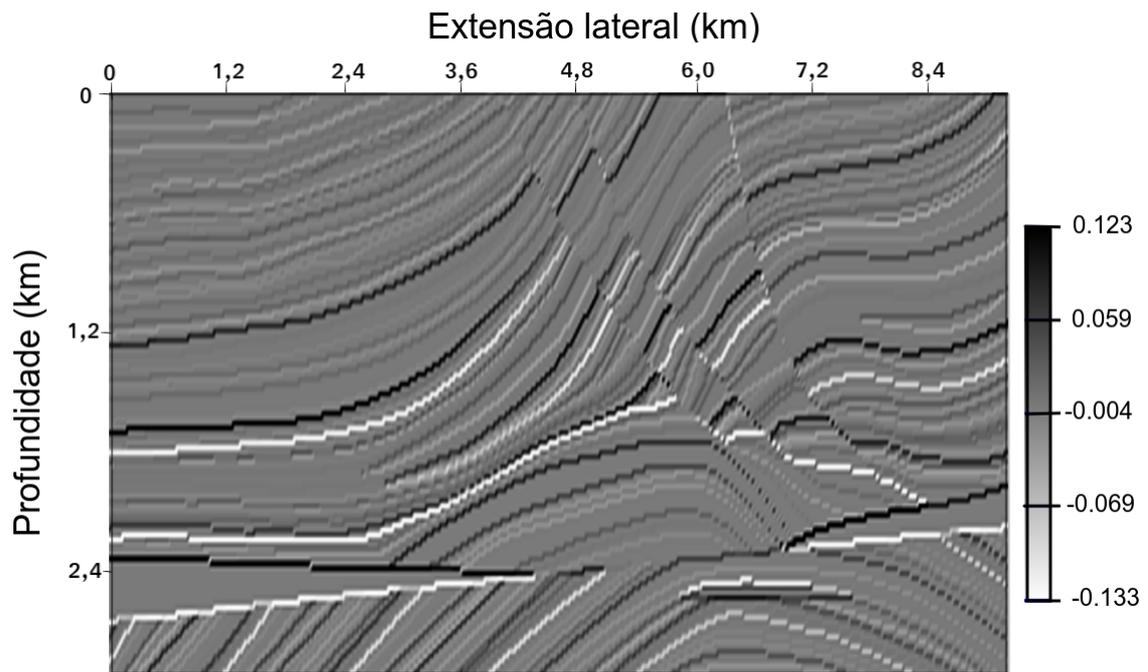


Figura 4.6: Modelo de refletividade verdadeiro do Marmousi.

A partir da aproximação da matriz Hessiana e da imagem migrada, o sistema linear (3.34) é resolvido e a imagem migrada deconvolvida é estimada. A Figura 4.7 esquematiza a aplicação dos sistemas lineares (3.39) e (3.38), especificados para a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e de amplitude verdadeira, respectivamente.

LSM-domínio da imagem

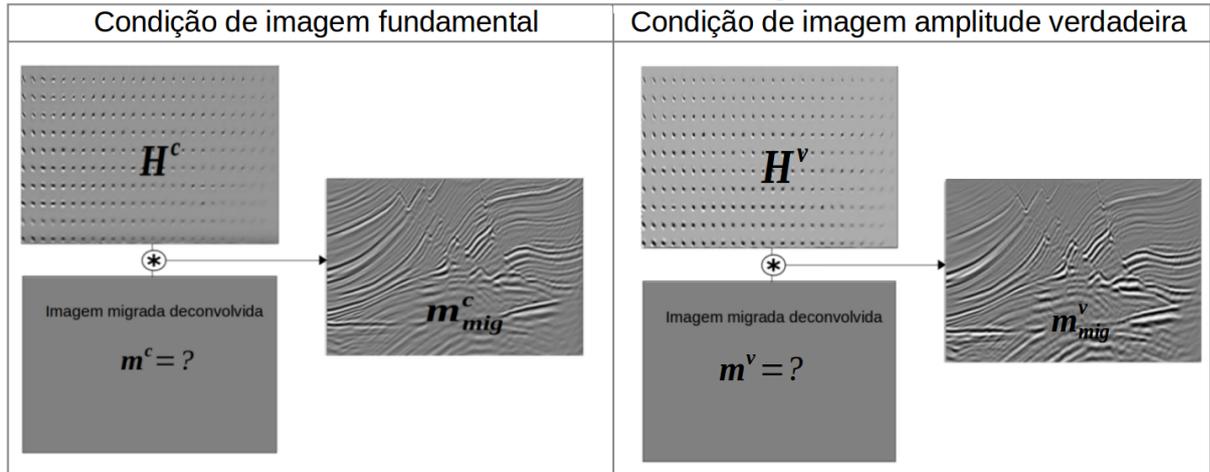


Figura 4.7: Esquema da implementação de LSM no domínio da imagem: conhecidas a imagem migrada e matriz Hessiana (PSFs), o sistema linear é resolvido e o modelo é estimado. Utilização da condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano. (lado esquerdo) e utilização da condição de imagem com amplitude verdadeira (lado direito).

A resposta para as interrogações associadas aos modelos \mathbf{m}^c e \mathbf{m}^v da Figura 4.7 são mostrados nas Figuras 4.8 e 4.9, respectivamente.

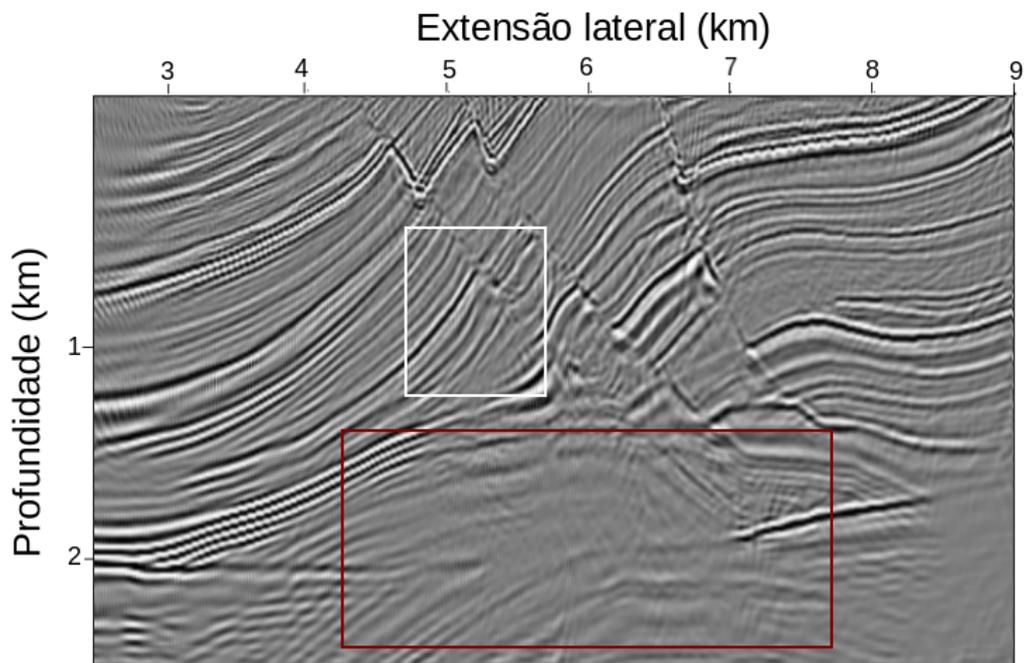


Figura 4.8: Imagem deconvolvida usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano.

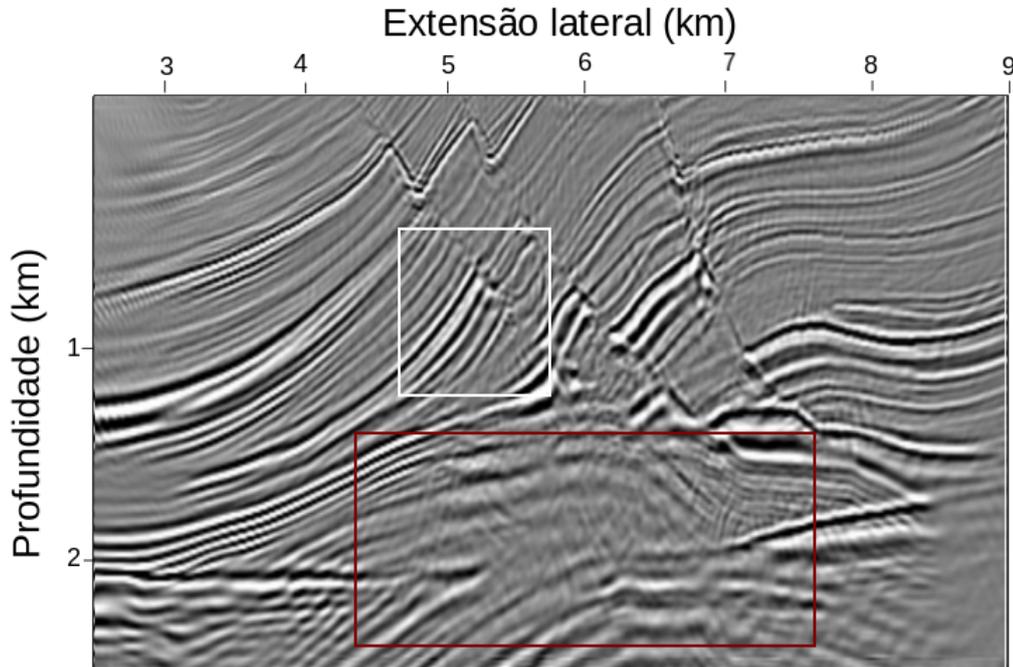


Figura 4.9: Imagem deconvolvida usando condição de imagem de amplitude verdadeira.

A Figura 4.9 apresenta o resultado da LSM no domínio da imagem utilizando condição de imagem de amplitude verdadeira. Para avaliarmos a qualidade dessa abordagem, à comparamos com o resultado correspondente da LSM usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano, (Figura 4.8).

As imagens deconvolvidas (Figuras 4.8 e 4.9), em relação às respectivas imagens migradas (Figuras 4.4 e 4.5), apresentam uma ganho expressivo de resolução. Isto é mostrado através da comparação, em detalhe, da região localizada no extremo esquerdo superior das imagens migradas e deconvolvidas, como mostram as Figuras 4.10 e 4.11.

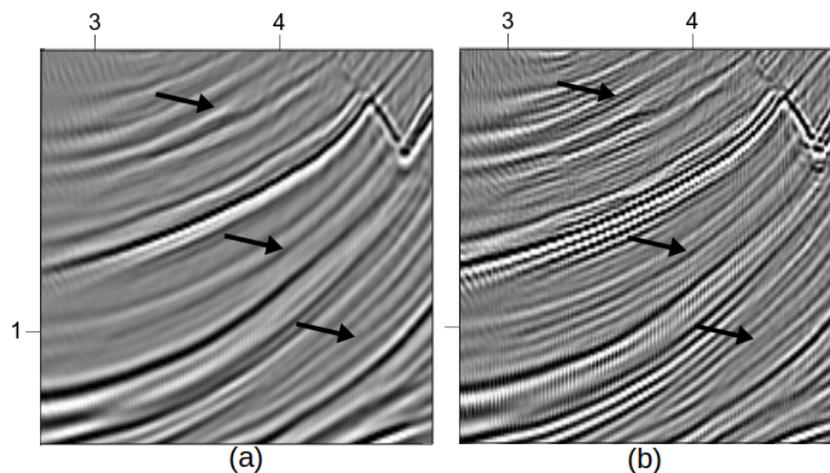


Figura 4.10: Efeito da aplicação de LSM utilizando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano (ampliação da região localizada no extremo esquerdo superior das imagens migrada e deconvolvidas. Imagem migrada (a) e imagem deconvolvida (b). As setas indicam a diferença de resolução entre as imagens.

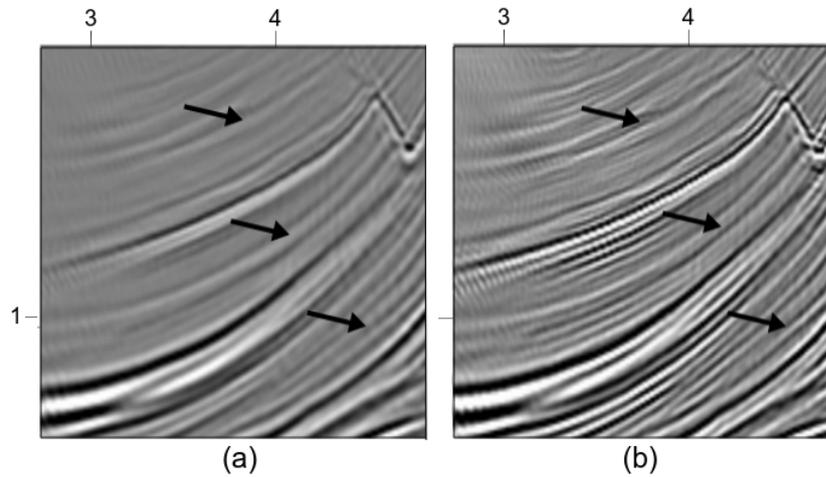


Figura 4.11: Efeito da aplicação da LSM usando a condição de imagem de verdadeira amplitude (ampliação da região localizada no extremo esquerdo superior das imagens migradas e deconvolidadas). Imagem migrada (a) e imagem deconvolvida (b). As setas indicam a diferença de resolução entre as imagens.

O efeito do aumento de resolução apresentado pela deconvolução em relação à imagem migrada valida a aplicação da LSM deste trabalho de acordo com os resultados da literatura.

4.2 COMPARAÇÃO ENTRE A LSM USANDO AS CONDIÇÕES DE IMAGEM COM COMPENSAÇÃO DE AMPLITUDE/FILTRO LAPLACIANO E DE AMPLITUDE VERDADEIRA.

Das duas abordagens discutidas para a condição de imagem, a imagem deconvolvida que apresenta maior qualidade deve produzir resultados mais coerentes com o modelo de refletividade verdadeiro em termos de resolução e proporção de amplitude.

A imagem deconvolvida com amplitude verdadeira apresentou resultados mais coerentes com a refletividade verdadeira que a imagem deconvolvida usando compensação de amplitude/filtro Laplaciano. Isto é mostrado através da ampliação das regiões indicadas pelos retângulos nas imagens deconvolvidas, Figuras 4.8 e 4.9.

A região indicada pelo retângulo branco nas imagens deconvolvidas e a respectiva região no modelo de refletividade verdadeiro da Figura 4.6 é mostrada na Figura (4.12)

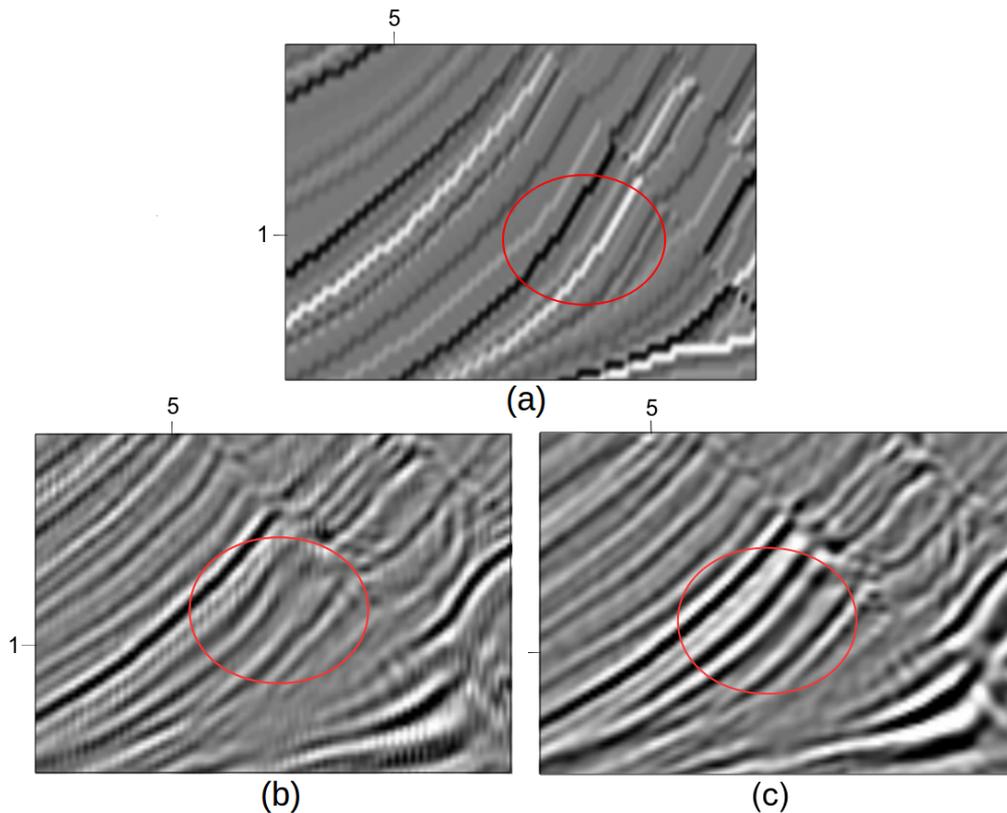


Figura 4.12: Detalhe da região indicada pelo retângulo branco nas Figuras (4.8) e (4.9) e a respectiva região no modelo de refletividade verdadeiro. (a) Refletividade verdadeira, (b) imagem deconvolvida usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e (c) imagem deconvolvida usando condição de imagem de amplitude verdadeira.

A Figura 4.12 mostra que a deconvolução usando verdadeira amplitude produz informação a cerca de refletores com mergulho acentuado mais coerente com os refletores do modelo de refletividade verdadeiro, compare as regiões destacadas pelo círculo vermelho. Falsas descontinuidades nos refletores e a baixa amplitude associados à imagem com

condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano são superados pela condição de imagem de amplitude verdadeira.

Outra comparação, a deconvolução da imagem migrada usando a condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano perde resolução e principalmente amplitude com a profundidade, Figura 4.8. Este efeito não é observado na imagem deconvolvida com amplitude verdadeira, Figura 4.9, como mostra o detalhe da região indicada pelo retângulo vermelho nas Figuras 4.8 e 4.9 e da respectiva região no modelo de refletividade verdadeiro na Figura 4.6, Figura 4.13.

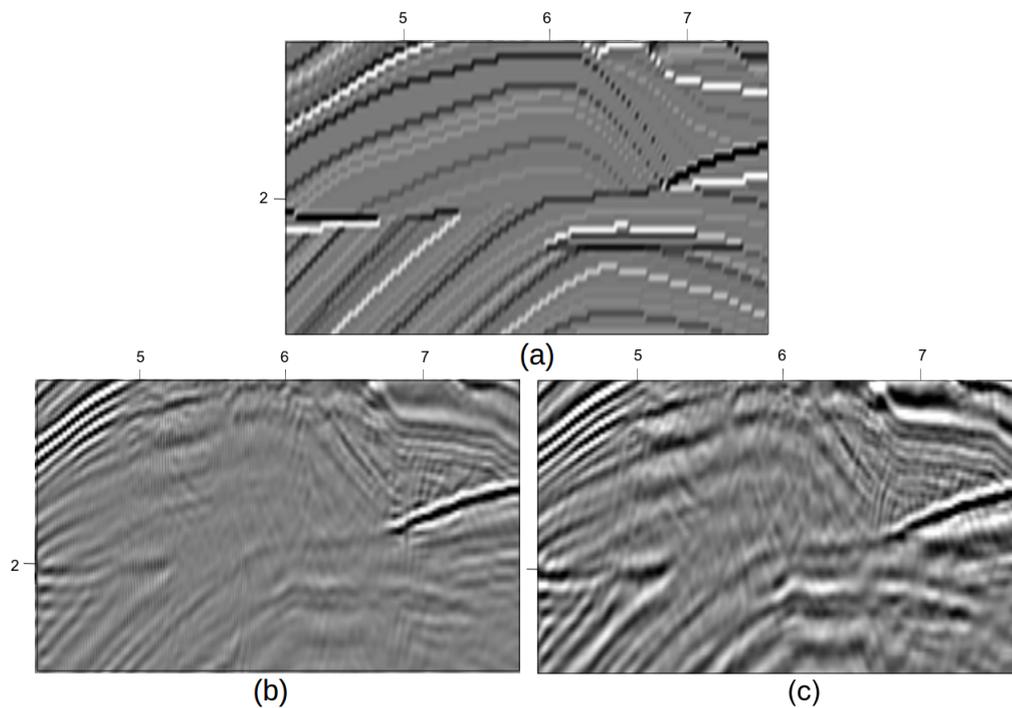


Figura 4.13: Detalhe da região indicada pelo retângulo vermelho nas Figuras (4.8) e (4.9) e a respectiva região no modelo de refletividade verdadeiro . (a) Refletividade verdadeira, (b) imagem deconvolvida usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e (c) imagem deconvolvida usando condição de imagem de amplitude verdadeira.

O destaque mostrado na Figura 4.13 configura a região de maior profundidade e com maior complexidade estrutural do modelo de velocidade mostrado na Figura 4.1.a. Para esta região, a qualidade da LSM usando a condição de imagem de amplitude verdadeira sobre à utilizando a de condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano pode ser observada. A comparação das imagens deconvolvidas (Figura 4.13.b e 4.13.c) com o modelo de refletividade verdadeiro (Figura 4.13.a) mostra que a primeira apresenta resolução e amplitude proporcionais aos do modelo de velocidade verdadeiro.

O melhor resultado da imagem deconvolvida usando a condição de imagem de amplitude verdadeira revela que a aproximação da matriz Hessiana para o problema da LSM no domínio da imagem é sensível à condição de imagem utilizada na migração.

4.3 FATORES QUE INTERFEREM NA LSM

Os resultados das deconvoluções mostrados na seção anterior dependeram do ajuste de três fatores: janelamento das PSFs, espaçamento entre as PSFs e do parâmetro de amortecimento λ . O efeito de cada um desses fatores na deconvolução é mostrado nas próximas seções.

4.3.1 Janelamento das Point Spread Functions

As Figuras 4.14 e 4.15 apresentam o efeito produzido, na imagem deconvolvida, pela atuação da janela radial Nuttall (equação 3.31) nas PSFs. As Figuras 4.14 e 4.15 mostram esse resultado para a deconvolução com condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e de amplitude verdadeira, respectivamente.

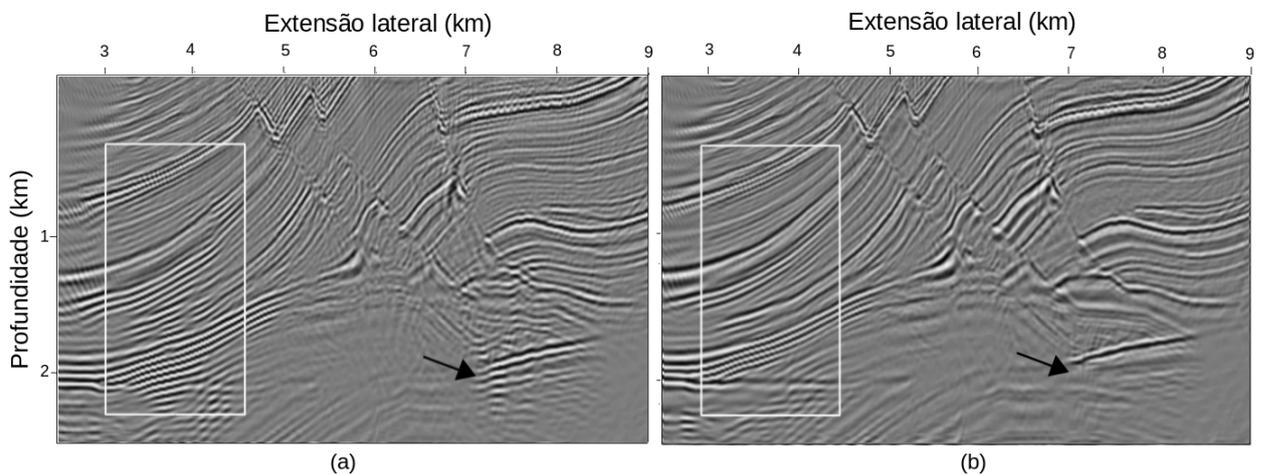


Figura 4.14: Imagem deconvolvida sem janelamento das PSFs (a) e com janelamento da PSFs (b) (condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano).

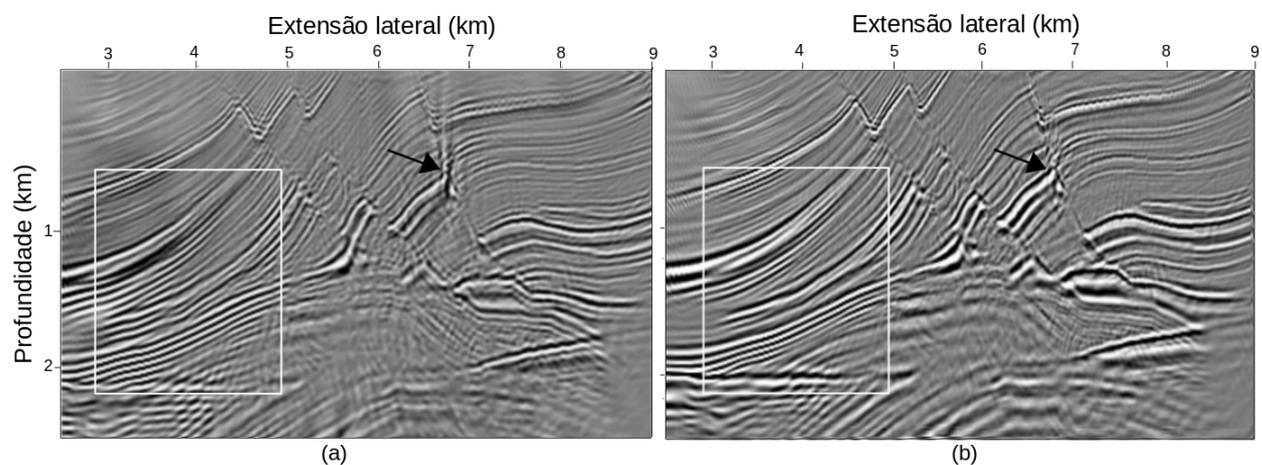


Figura 4.15: Imagem deconvolvida sem janelamento das PSFs (a) e com janelamento da PSFs (b) (condição de imagem de amplitude verdadeira).

As Figuras 4.14 e 4.15 permite concluir que a aplicação de janelamento nas PSFs produz imagens deconvolidas com maior resolução (compare as regiões indicadas pelos retângulos brancos) e melhor posicionamento dos refletores (compare as regiões indicadas pelas setas). Esse resultado deve-se ao fato do algoritmo de otimização não possuir contribuição dos efeitos de borda das PSFs no ajuste da função objetivo. Ao considerar os efeitos de borda das PSFs, o algoritmo tenta ajustar informações da matriz Hessiana que não são explicadas pela imagem migrada. O resultado é o surgimento de artefatos ruidosos na imagem deconvolvida bem como resolução comprometida. O resultado da deconvolução apresentado nas Figuras 4.8 e 4.9 corresponde ao janelamento das PSFs.

4.3.2 Espaçamento entre as Point Spread Functions

As Figuras 4.16 e 4.17 mostram o efeito provocado na deconvolução da imagem migrada, usando condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano e de amplitude verdadeira, respectivamente, devido ao espaçamento entre as PSFs.

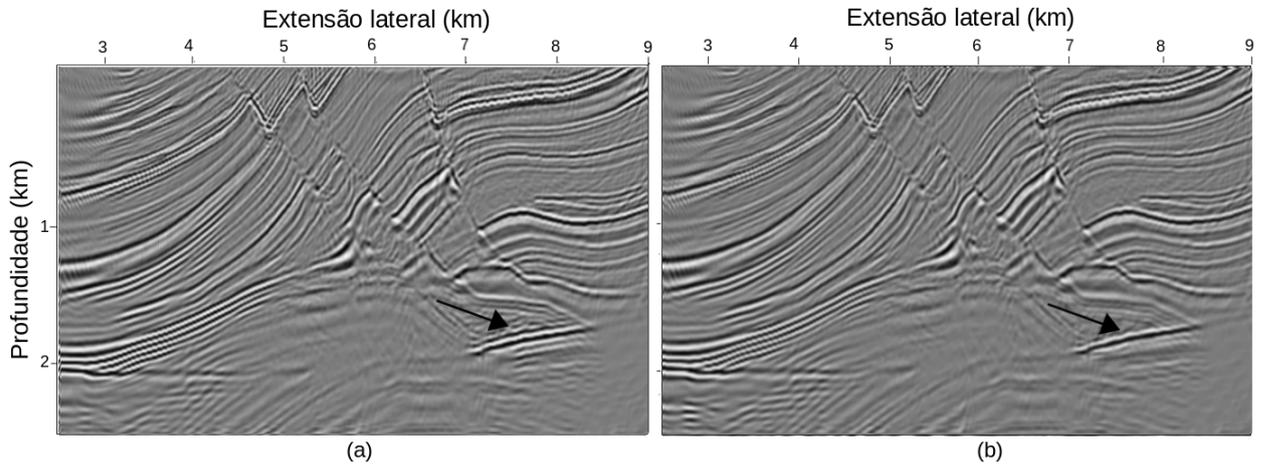


Figura 4.16: Efeito do espaçamento entre as PSFs na deconvolução. Deconvolução com espaçamento de 500 metros entre as PSFs (a) e deconvolução com espaçamento de 250 metros entre as PSFs (b) (condição de imagem com compensação de amplitude/filtro Laplaciano).

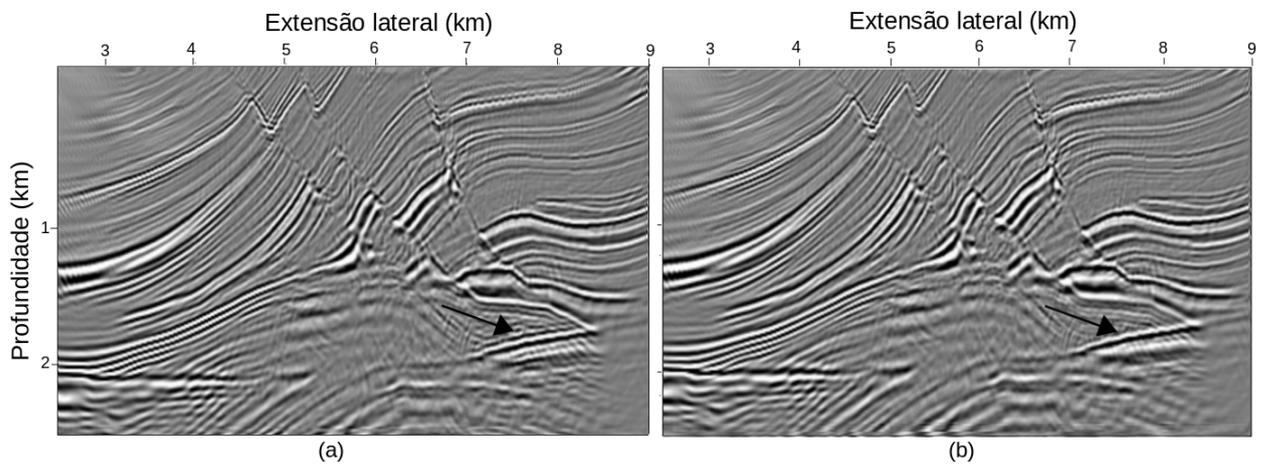


Figura 4.17: Efeito do espaçamento entre as PSFs na deconvolução. Deconvolução com espaçamento de 500 metros entre as PSFs (a) e deconvolução com espaçamento de 250 metros entre as PSFs (b) (condição de imagem com amplitude verdadeira)

Segundo as deconvoluções das Figuras 4.16 e 4.17, é mostrado que para este modelo o espaçamento entre as PSFs não produz mudança significativa entre os resultados. Isso pode ser explicado devido a combinação de dois fatores: 1- a variação no modelo de velocidade é suave em torno de 500 metros e conseqüentemente 2- a aplicação da interpolação bilinear estima bons resultados para as PSFs estre esse espaçamento.

Espera-se que quanto menor o espaçamento entre as PSFs, melhor o resultado da deconvolução, já que informação mais acurada da Hessiana é estimada. As Figuras 4.16 e 4.17 mostram uma pequena melhora oferecida pelo menor espaçamento entre as PSFs (observe as regiões indicadas pelas setas). Nessa região, o contraste abrupto de velocidade entre a camada salina e o sedimento é melhor explicado pelas PSFs de menor espaçamento, resultando na melhor localização do refletor.

Podemos supor que o espaçamento entre as PSFs no problema de mínimos quadrados no domínio da imagem depende da complexidade do modelo. Quanto maior a variação de velocidade, menor deve ser o espaçamento entre as PSFs para que resultados mais acurados sejam alcançados. Por outro lado, quanto menor o espaçamento entre as PSFs, maior o custo computacional.

No Exemplo das Figuras 4.16 e 4.17, para PSFs geradas com espaçamento de 500 metros, apenas uma modelagem e migração foi suficiente (um plano imagem de PSFs). Para o espaçamento de 250 metros, o custo aumenta em quatro vezes, uma vez que faz-se necessária avaliação de quatro modelagens e migrações (quatro planos imagem de PSFs).

A necessidade de espaçar os pontos difratores com distância mínima, para que não haja interferência de uma PSFs sobre a outra, faz com que esse custo aumente quando desejamos espaçamentos inferiores a este limite. O resultado da deconvolução apresentado nas Figuras 4.8 e 4.9 é referente ao espaçamento de 250 metros entre as PSFs.

4.3.3 Fator de amortecimento λ

A Figura 4.18 mostra o efeito provocado na imagem deconvolvida dependendo da escolha do parâmetro de amortecimento λ no sistema linear (3.38) - apenas a deconvolução com amplitude verdadeira é considerada.

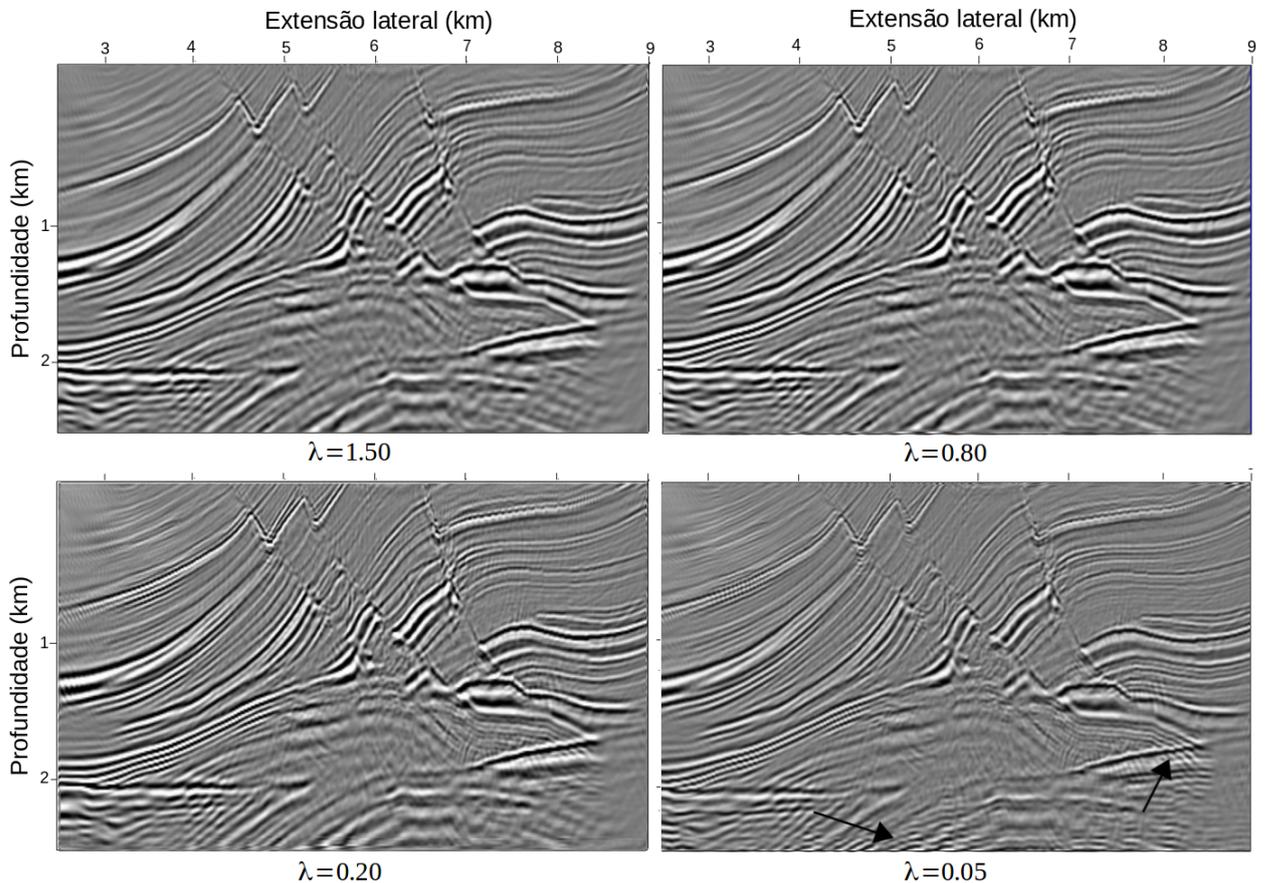


Figura 4.18: Efeito da resolução na imagem deconvolvida de acordo com do parâmetro de amortecimento λ .

Este resultado é intrínseco do algoritmo de otimização. Quanto menor o valor de λ , mais a função de custo é ajustada. No nosso problema, esse maior ajuste resulta em maior resolução da imagem deconvolvida. Quando λ é muito pequeno, a tentativa de um maior ajuste da função objetivo pode gerar degradações na imagem deconvolvida: desfocalização dos refletores (setas na Figura 4.18.d), devido a tentativa de ajuste de informações não explicadas pela matriz Hessiana ou pela imagem migrada.

O efeito do ganho de resolução com a diminuição do parâmetro λ , bem como a degradação na imagem quando este é suficientemente pequeno, é evidenciado através da ampliação da região dominada por dobras da Figura 4.18, como mostra a Figura 4.19.

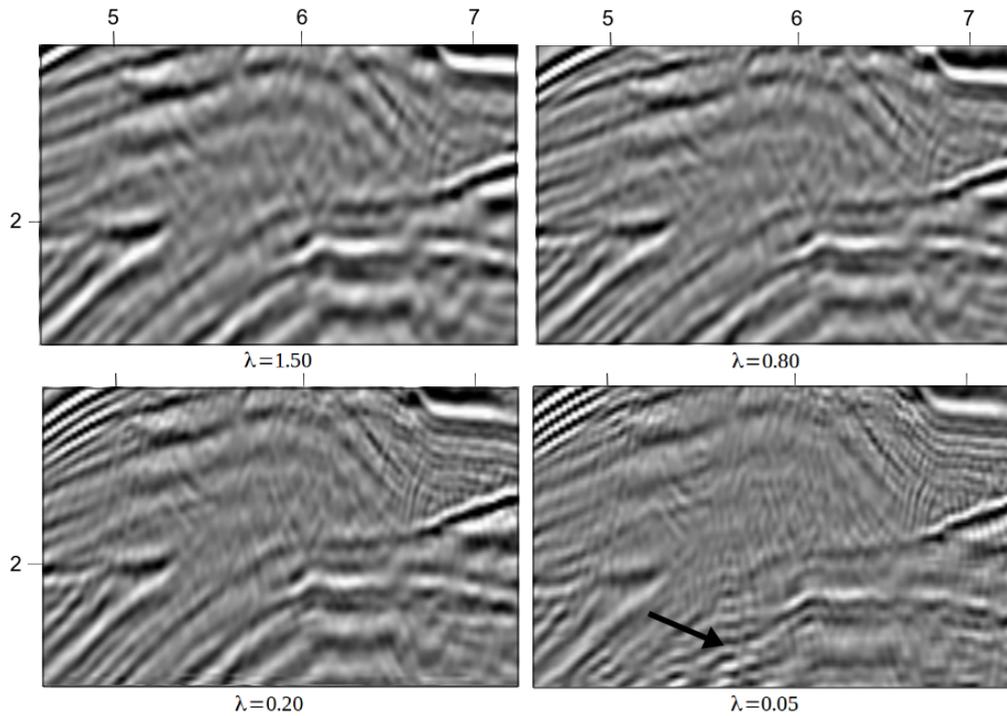


Figura 4.19: Detalhe da região dominada por dobras na Figura 4.18 para evidenciar o aumento de resolução de acordo com a diminuição do parâmetro λ . Para $\lambda = 0.05$ a imagem deconvolvida perde focalização devido a instabilidade da solução do sistema linear (região apontada pela seta).

Os resultados da deconvolução apresentados nas Figuras 4.8 e 4.9 são referentes à $\lambda = 0.2$. Esse valor foi o mínimo possível sem que a imagem fosse danificada.

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, propusemos a aplicação de LSM no domínio da imagem a partir da migração RTM com amplitude verdadeira. Nossos experimentos numéricos indicam que a abordagem proposta, quando comparada à migração por quadrados mínimos tradicional, melhora a resolução e recupera amplitudes mais consistentes com a refletividade correta do modelo. Este resultado decorre de que a estimativa numérica do Hessiano no domínio da imagem depende fortemente da condição de imagem utilizada na RTM.

A migração por quadrados mínimos no domínio da imagem também depende, além da condição de imagem para RTM, da escolha de outros parâmetros: janelamento das PSFs estimadas, densidade das PSFs estimadas na malha de discretização da imagem migrada e, regularização do sistema linear utilizado para deconvolver o Hessiano. Nossa implementação utiliza janelamento Nuttall radial das PSFs. Obtivemos melhores resultados efetuando a estimativa do raio de dispersão da PSF através da média harmônica ponderada da distância radial, utilizando como ponderação o valor absoluto da amplitude da PSF.

A densidade das PSFs estimadas, na malha e amostragem da imagem, impacta fortemente a qualidade dos resultados e o custo computacional da migração por quadrados mínimos. Quanto maior a densidade de PSFs melhor a qualidade da imagem e maior o custo computacional. Neste trabalho efetuamos experimentos numéricos para avaliar a menor densidade de PSFs que não degrada a imagem e utilizamos interpolação bilinear para reduzir o número de PSFs necessárias sem comprometer a qualidade da imagem. Finalmente, o parâmetro de regularização, que modula o amortecimento na solução do sistema linear utilizado para deconvolução numérica do Hessiano, também afeta a resolução das imagens migradas. Quanto maior o parâmetro de regularização menor o efeito de artefatos associados à abertura de aquisição e menor a resolução da imagem migrada. A seleção do parâmetro de regularização, portanto, depende dos objetivos do interprete em relação à resolução desejada para a imagem.

A implementação da migração por quadrados mínimos no domínio da imagem, usando a condição de imagem de com compensação de amplitude/filtro Lapaciano com compensação de amplitude, produz um aumento de resolução. Entretanto, a migração por quadrados mínimos no domínio do dado pode corrigir melhor os efeitos da abertura limitada da geometria de aquisição. Portanto, uma avaliação mais criteriosa de nossos resultados requer a comparação das imagens obtidas com nossa implementação no domínio da imagem com a imagem correspondente obtida usando a migração por quadrados mínimos no domínio do dado. Esta investigação será o objetivo da continuidade deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Aki, K. e Richards, P.G., 2002, Quantitative seismology.
- Aoki, N. e Schuster, G.T., 2009, Fast least-squares migration with a deblurring filter. *Geophysics*, **74**(6), WCA83–WCA93.
- Ba, J., Carcione, J.M., Du, Q., Zhao, H. e Muller, T., 2014, Seismic exploration of hydrocarbons in heterogeneous reservoirs: New theories, methods and applications. Elsevier.
- Baysal, E., Kosloff, D.D. e Sherwood, J.W., 1983, Reverse time migration. *Geophysics*, **48**(11), 1514–1524.
- Biondi, B.L., 2006, 3D seismic imaging. Society of Exploration Geophysicists.
- Bleistein, N., Cohen, J. e Stockwell, J., 2001, 2001, mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion: Springer-verlag, new york.
- Carotti, D., Gatti, M. e Douma, H., 2017, Improving images of presalt targets offshore brazil using least-squares rtm and its quality control. In: SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017. Society of Exploration Geophysicists, 4504–4508.
- Chang, W.F. e McMechan, G.A., 1986, Reverse-time migration of offset vertical seismic profiling data using the excitation-time imaging condition. *Geophysics*, **51**(1), 67–84.
- Chattopadhyay, S. e McMechan, G.A., 2008, Imaging conditions for prestack reverse-time migration. *Geophysics*, **73**(3), S81–S89.
- Claerbout, J.F., 1971, Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, **36**(3), 467–481.
- Claerbout, J.F., 1985, Imaging the earth's interior, vol. 1. Blackwell scientific publications Oxford.
- Claerbout, J.F., 1992, Earth soundings analysis: Processing versus inversion, vol. 6. Blackwell Scientific Publications Boston.
- Clapp, M.L., 2005, Imaging under salt: Illumination compensation by regularized inversion. Tese de Doutorado, Stanford University.
- Costa, J., Silva Neto, F., Alcantara, M., Schleicher, J. e Novais, A., 2009, Obliquity-correction imaging condition for reverse time migration. *Geophysics*, **74**(3), S57–S66.

- Fletcher, R.P., Nichols, D., Bloor, R. e Coates, R.T., 2016, Least-squares migration—data domain versus image domain using point spread functions. *The Leading Edge*, **35**(2), 157–162.
- Gelius, L.J., Lecomte, I. e Tabti, H., 2002, Analysis of the resolution function in seismic prestack depth imaging. *Geophysical Prospecting*, **50**(5), 505–515.
- Golub, G.H. e Van Loan, C.F., 2012, *Matrix computations*, vol. 3. JHU Press.
- Guitton, A., 2004, Amplitude and kinematic corrections of migrated images for nonunitary imaging operators. *Geophysics*, **69**(4), 1017–1024.
- Heinzel, G., Rüdiger, A. e Schilling, R., 2002, Spectrum and spectral density estimation by the discrete fourier transform (dft), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows.
- Hill, N.R., 1990, Gaussian beam migration. *Geophysics*, **55**(11), 1416–1428.
- Ikelle, L.T. e Amundsen, L., 2018, *Introduction to petroleum seismology*. Society of Exploration Geophysicists.
- Kaelin, B. e Guitton, A., 2006, Imaging condition for reverse time migration. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2006*. Society of Exploration Geophysicists, 2594–2598.
- Kiyashchenko, D., Plessix, R.E., Kashtan, B. e Troyan, V., 2007, A modified imaging principle for true-amplitude wave-equation migration. *Geophysical Journal International*, **168**(3), 1093–1104.
- Kühl, H. e Sacchi, M.D., 2003, Least-squares wave-equation migration for avp/ava inversion. *Geophysics*, **68**(1), 262–273.
- Lecomte, I., 2008, Resolution and illumination analyses in psdm: A ray-based approach. *The Leading Edge*, **27**(5), 650–663.
- Leveille, J.P., Jones, I.F., Zhou, Z.Z., Wang, B. e Liu, F., 2011, Subsalt imaging for exploration, production, and development: A review. *Geophysics*, **76**(5), WB3–WB20.
- McMechan, G.A., 1983, Migration by extrapolation of time-dependent boundary values. *Geophysical Prospecting*, **31**(3), 413–420.
- Menke, W., 1989, *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic press.
- Mulder, W.A. e Plessix, R.E., 2004, A comparison between one-way and two-way wave-equation migration. *Geophysics*, **69**(6), 1491–1504.

- Nemeth, T., Wu, C. e Schuster, G.T., 1999, Least-squares migration of incomplete reflection data. *Geophysics*, **64**(1), 208–221.
- Op't Root, T.J., Stolk, C.C. e Maarten, V., 2012, Linearized inverse scattering based on seismic reverse time migration. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **98**(2), 211–238.
- Plessix, R.E. e Mulder, W., 2004, Frequency-domain finite-difference amplitude-preserving migration. *Geophysical Journal International*, **157**(3), 975–987.
- Prucha, M.L. e Biondi, B.L., 2002, Subsalt event regularization with steering filters. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2002*. Society of Exploration Geophysicists, 1176–1179.
- Schuster, G.T., 2017, *Seismic inversion*. Society of Exploration Geophysicists.
- Shin, C., Jang, S. e Min, D.J., 2001, Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory. *Geophysical prospecting*, **49**(5), 592–606.
- Snieder, R., 2004, *A guided tour of mathematical methods for the physical sciences*. Cambridge University Press.
- Snieder, R. e Trampert, J., 1999, Inverse problems in geophysics. In: *Wavefield inversion*. Springer, 119–190.
- Tarantola, A., 2005, Inverse problem theory and methods for model parameter estimation, vol. 89. *siam*.
- Valenciano, A., Lu, S., Chemingui, N. e Yang, J., 2015, High resolution imaging by wave equation reflectivity inversion. *77th EAGE Conference and Exhibition 2015*.
- Valenciano, A.A., 2008, *Imaging by wave-equation inversion*, vol. 69. Citeseer.
- Whitmore, N.D., 1983, Iterative depth migration by backward time propagation. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1983*. Society of Exploration Geophysicists, 382–385.
- Yang, J., Liu, Y. e Dong, L., 2016, Least-squares reverse time migration in the presence of density variations. *Geophysics*, **81**(6), S497–S509.
- Yang, K. e Zhang, J., 2018, Least-squares reverse time migration with an angle-dependent weighting factor. *Geophysics*, **83**(3), S299–S310.
- Zhang, Q. et al., 2015, Source-independent least-squares reverse time migration. *77th EAGE Conference and Exhibition 2015*.

Zhang, Y. e Sun, J., 2009, Practical issues of reverse time migration: True amplitude gathers, noise removal and harmonic-source encoding. Beijing International Geophysical Conference and Exposition 2009: Beijing 2009 International Geophysical Conference and Exposition, Beijing, China, 24–27 April 2009, Society of Exploration Geophysicists, 204–204.